Algoritmus és struktúra: Halmazpartíciók lokális feltételekkel

Doktori (PhD) értekezés összefoglaló

Írta: Bujtás László Balázsné

(Csilla Bujtás)

Témavezető:
Dr. Tuza Zsolt

Pannon Egyetem

Műszaki Informatikai Kar

Informatikai Tudományok Doktori Iskola

2008.

Motiváció és célkitűzések

A gráfszínezés klasszikus modellnek számít a kombinatorikus optimalizálásban, amelyet széles körben használnak tudományos és műszaki területeken is. Az informatikai tudományok gyors fejlődése új távlatokat nyitott az alkalmazások számára.

Az eredeti értelmezés szerinti csúcsszínezésben a lokális feltételek egyetlen típusa használható, miszerint egy él két végpontjához különböző színeket kell rendelni. Azonban a felmerülő problémák között szép számmal akadnak olyanok is, ahol ez a megközelítés nem eredményez megfelelő pontosságú modellt. Mindez döntően befolyásolta az új típusú, általánosabb színezési feltételek megjelenését és intenzív tanulmányozását.

A disszertációban tárgyalt partíciós feltételek segítségével ezen tágabb értelemben vett gráfszínezés legtöbb változata egységes keretben vizsgálható, és ezáltal a gyakorlati problémák széles spektrumának modellezésére kínál lehetőséget.

A gráfszínezés elméletének egyik fontos alkalmazása napjainkban a ,,frekvencia-kiosztási probléma", mely tipikusan a mobiltelefon hálózatok, a TV- és rádió műsorszórás illetve a műholdas távközlési rendszerek tervezéséhez kapcsolódik.

A feladat legáltalánosabb megfogalmazása szerint frekvenciákat kell rendelni a vezeték nélküli összeköttetések (illetve adók) meghatározott halmazához úgy, hogy az interferencia egy még elfogadhatónak tartott alacsony szintet ne lépjen túl. Az x_i és x_j adókhoz rendelt frekvenciák akkor okoznak minőségromlást jelentő interferenciát, ha x_i és x_j földrajzilag túl közel helyezkednek el egymáshoz, és ugyanakkor a hozzájuk rendelt frekvenciák különbsége is túl kicsi (vagy pl. a frekvenciák harmonikusok).

A frekvencia-kiosztási probléma először az 1960-as években került megfogalmazásra. Metzger [32] mutatta meg, hogy ez jól kezelhető gráfmodell és matematikai optimalizációs eljárások segítségével. A vezetéknélküli kommunikációs rendszerek gyors terjedésével e problémakör a figyelem középpontjába került [21, 19, 35, 30, 17, 10]. Napjainkban új kihívást jelentő frekvencia-kiosztási problémák jelennek meg az analóg technológia digitálissá alakítása nyomán.

A frekvencia-kiosztási probléma különböző típusú alkalmazásaiban más-más feltételeket kell kielégíteni, következésképpen a hozzájuk kapcsolódó matematikai modellek is eltérnek egymástól.

Valamennyi modellben az $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ adók a gráf csúcsainak tekintendők, egy $\{x_i, x_j\}$ él pedig azt jelenti, hogy a megfelelő adók földrajzi helyzetüknél fogva interferenciát okozhatnak. A csúcsokhoz rendelt színeket (vagyis frekvenciákat) egy rögzített $\{1, 2, \ldots, K\}$ halmazból kell választani. Az így nyert f függvény jó színezésnek tekintendő, ha kielégíti a speciálisan előírt feltételeket, ami által a túlzott mértékű interferencia elkerülhető.

- A legegyszerűbb esetben az egyetlen feltétel az, hogy bármely két szomszédos (éllel összekötött) csúcs különböző színű legyen. Ez a klasszikus csúcsszínezésnek felel meg. Sajnos, az esetek többségében ezzel túlságosan leegyszerűsítenénk a problémát, ezért új típusú partíciós feltételek bevezetésére van szükség .

- Ha különbséget teszünk ,,közeli" és ,,nagyon közeli" adók között, akkor a két esetre eltérő feltételeket adhatunk. Az úgynevezett $L(d, 1)$-színezésben bármely két ,,nagyon közeli" (vagyis éllel összekötött) x_i és x_j csúcshoz legalább d különbségű frekvenciákat kell rendelni, vagyis $|f(x_i) - f(x_j)| \geq d$; míg két csúcsnak, amelyek távolsága kettő (vagyis rendelkeznek közös szomszéddal) különböző színeket kell megfeleltetni. Ezen modell általánosításaként vezették be a ,,távolság-színezést", amikor a gráfban nem csak az egy vagy kettő, hanem a három, négy, $\ldots$, k távolságra levő[1] csúcsokhoz rendelt színek (frekvenciák) eltérésére is feltételek adottak a $d_1, d_2, \ldots, d_k$ alsó küszöbértékekkel. [20]

- A ,,küszöb-mátrix" bevezetésével a frekvenciák minimális távolsága élenként külön-külön is megadható. Az $\{x_i, x_j\}$ él azt jelenti, hogy az adók zavarhatják egymást. A mátrixban szereplő $\ell(x_i, x_j)$ értékek a frekvenciák minimális távolságát írják elő, vagyis az $|f(x_i) - f(x_j)| \geq \ell(x_i, x_j)$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülnie az interferencia elkerüléséhez [31]. Ez a legelterjedtebb modell, ha a probléma mobiltelefon hálózatok frekvencia-kiosztásaira vonatkozik.

- Más esetekben pontosabb leírás kapható úgy, ha a minimálisan megkövetelt különbségek helyett a tiltott differenciák T halmaza kerül megadásra. Ekkor az x_i és x_j szomszédos csúcsokhoz olyan színeket kell rendelni, amelyekre $|f(x_i) - f(x_j)| \notin T$ teljesül. A nyilvánosságra hozott adatok szerint például az UHF televíziós sugárzásra vonatkozóan a kerülendő differenciák $T = \{0, 1, 2, 5, 14\}$ halmaza használatos a frekvencia-elosztásnál. Az általánosított T-színezésnél a tiltott különbségek halmaza megadható élenként eltérő módon is [21, 13].

- Az esetek többségében egy-egy adó számára csak a a frekvenciák valamely rögzített részhalmazából választhatunk értéket. Ez a feltétel a megfelelő színezési modell listás színezéssel kombinált változatának felel meg [37, 28].

A fent bemutatott színezési típusok mindegyike természetes módon modellezhető a disszertációban bevezetett új partíciós feltételek segítségével, azaz színhatárolt- és stab-hipergráfok alkalmazásával. A modellezés pontos leírását a dolgozat tartalmazza.

További alkalmazási lehetőségek adódnak az erőforrás-elosztási probléma más területeiről is, amint ezek bemutatásra kerülnek például az üzembiztos rendszerek és a szolgáltatásorientált architektúra (SOA) tervezése [34, 12], a fájl-átvitel ütemezése, továbbá az adathozzáférés optimalizálása [23] esetében.

[1] Egy gráfban két csúcs távolságának nevezzük az őket összekötő legrövidebb út éleinek számát.

Módszerek

A vegyes hipergráfok elmélete egy viszonylag fiatal, de máris nagyon sok értékes eredményt felmutató, jól kidolgozott területnek számít. A disszertáció első része néhány fontos, több év óta nyitott probléma megoldását tartalmazza. Ezek a kérdések a témakör eltérő részeihez tartoznak, következésképpen nem alkotnak szorosan összefüggő egészet.

A második részben új típusú lokális partíciós feltételek kerülnek bevezetésre. Ezekkel élenként alsó és felső korlátok adhatók az ott előforduló színek számára illetve a legnagyobb egyszínű részhalmaz méretére vonatkozóan. Ez a vegyes hipergráf elmélet és más korábbi színezési modellek közös általánosítását eredményezi, miközben a korábbiaknál erősebb, és így újabb alkalmazások lehetőségét is felkínáló modellhez jutunk.

A disszertációban foglalt új eredmények jelentős része algoritmusok illetve konstrukciók leírása által nyer igazolást, továbbá ezek a bizonyítások gyakorta egészülnek ki teljes indukcióval. A kötött szerkezetű vagy tulajdonságú halmazrendszerek elméleti vizsgálata több esetben eredményez olyan karakterizációt, amely közvetlenül megfelel egy polinom-idejű algoritmusnak. Máskor a vizsgált problémák NP-nehéznek bizonyulnak – ezek között van néhány, amely egészen meglepő eredménynek számít. Ilyenkor a szokásos eljárást követve, egy már bizonyítottan NP-nehéz problémát vezetünk vissza (polinomiális időben) a tekintett kérdés megválaszolására. Ezen eljárások során a legkülönfélébb területek bonyolultsági eredményeit használjuk fel.

A dolgozatban egy olyan algoritmikus eljárás is bevezetésre kerül, amely a színhatárolt hipergráfokra alkalmazva egy adott jó színezésből — az élek explicit ismerete nélkül — egy másik megfelelőt állít elő. Ily módon bizonyos hipergráf-osztályokra az eljárás ismételt alkalmazásával elérhető a színek számának csökkentése. Az alkalmazás feltételei az Átszínezési Lemmában vannak megfogalmazva. A lehetséges gyakorlati felhasználáson túl, az eljárás elméleti szempontból is igen hasznosnak bizonyult. Ezt az eljárást használjuk fel különböző kötött struktúrájú színhatárolt hipergráfok alsó kromatikus számára illetve az előforduló színszámhalmazok jellemzésére vonatkozó tételek bizonyításaiban.

A disszertációban az új eredmények némelyike meglehetősen formalizált alakban kerül kimondásra, mivel a pontos és teljes értékű megfogalmazás ezt követeli meg. Bár a matematikai jellegű szakkifejezések bevezetése itt sem kerülhető el, de ebben az összefoglalóban az a cél, hogy az eredmények egyszerűbb módon legyenek leírva. Ennek érdekében néhány állítás itt gyengébb formában szerepel, mint ahogyan bizonyításra kerül a dolgozatban, és a lehetséges erősítés irányát csak informálisan jelezzük.

Előzmények — A vegyes hipergráf modell

A hipergráfok[2] klasszikus értelemben vett csúcsszínezése (Erdős Pál, Hajnal András, 1966. [18]) azt a kikötést tartalmazza, hogy minden hiperélben legyen legalább két különböző színű csúcs. Közel 30 év elteltével vezette be Voloshin a vegyes hipergráf fogalmát [41, 42], amelyben két ellentétes irányú színezési feltétel használható. A $\mathcal{D}$-él szerepe megfelel a klasszikus esetnek, vagyis a hiperélnek tartalmaznia kell legalább két különböző színű csúcsot. A $\mathcal{C}$-él fogalmának megjelenésével viszont új partíciós feltételhez jutunk: a $\mathcal{C}$-élnek tartalmaznia kell legalább két azonos színű csúcsot.

Ezen terminológia szerint a klasszikus hipergráfok csak $\mathcal{D}$-éleket tartalmaznak. Itt mindig létezik megfelelő színezés (triviális esetben minden csúcs eltérő színt kap), és a szokásos kérdés az alsó kromatikus számra, vagyis a lehető legkevesebb számú színnel való színezésre vonatkozik. Hasonlóképp, ha egy hipergráf csak $\mathcal{C}$-éleket tartalmaz, más szóval $\mathcal{C}$-hipergráf, mindig létezik megfelelő színezése (trviálisan jó, ha csak egyetlen színt használunk), a szokásos probléma pedig a felső kromatikus szám, vagyis a felhasznált színek maximális számának meghatározása.

Alapvető változás tapasztalható viszont a kétfajta partíciós feltétel együttes alkalmazása esetén. A vegyes hipergráfok között találhatók olyanok is, amelyekre egyáltalán nem létezik megfelelő színezés. Mégpedig ezek a színezhetetlen struktúrák nem csupán egyfajta speciális szerkezetű kivételként, hanem igen változatos, épp ezért nehezen felismerhető formában fordulnak elő (Tuza, Voloshin [39]). Továbbá azok, amelyekre csak egyetlen megfelelő partíció létezik, szintén nehezen azonosíthatók (Tuza, Voloshin, Zhou [40]). Újabb meglepő tény, hogy a vegyes hipergráfok körében úgynevezett szakadás jelenhet meg a kromatikus spektrumban. Vagyis előfordulhat, hogy a hipergráf színezhető pontosan k' és pontosan k'' szín felhasználásával is, mégis valamely k' és k'' közötti g természetes számhoz nem adható meg g-színezés (Jiang, Mubayi, Voloshin, Tuza, West [22]).

Ez okból vált szükségessé egy új fogalom bevezetése: a $\mathcal{H}$ hipergráf $\Phi(\mathcal{H})$-val jelölt színszámhalmaza azon k értékek összessége, amelyekre $\mathcal{H}$-nak létezik színezése pontosan k színnel. Klasszikus hipergráfokra a színszámhalmaz a szakadásmentes $\Phi(\mathcal{H}) = \{\chi(\mathcal{H}), \ldots, n\}$ halmaz, ahol $\chi(\mathcal{H})$ az alsó kromatikus számot, n pedig a csúcsok számát jelöli. A $\mathcal{C}$-hipergráfok színszámhalmaza szintén szakadásmentes és $\Phi(\mathcal{H}) = \{1, \ldots, \bar{\chi}(\mathcal{H})\}$ alakú, ahol $\bar{\chi}(\mathcal{H})$ a felső kromatikus szám jele. Amint említettük, a vegyes hipergráfok színszámhalmazában előfordulhatnak szakadások. Ennél sokkal erősebb állítás is igaznak bizonyult, miszerint bármely, 1-nél nagyobb pozitív egészeket tartalmazó véges S halmaz előáll valamely vegyes hipergráf színszámhalmazaként [22].

A vegyes hipergráf elmélet területén folyó intenzív kutatást tanúsítja az a nagy mennyiségű eredmény, amely Voloshin monográfiájában [43], Tuza és Voloshin össze-

[2]Hipergráfnak nevezzük a $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ párt, ahol X a csúcsok halmaza, $\mathcal{E}$ a hiperélek halmaza, és minden hiperél a csúcshalmaz valamely legalább kételemű részhalmazának felel meg.

foglaló cikkében [38], valamint a rendszeresen frissített [44] internetes oldalon látható összegyűjtve.

Az alkalmazások szempontjából érdemes megjegyezni, hogy ez az összetett szerkezet az egzisztenciális és az extremális problémák modellezését egyaránt lehetővé teszi.

Vegyes hipergráfokra vonatkozó új eredmények

A disszertáció új tudományos eredményei két fő részre oszthatók. Először a vegyes hipergráfokra vonatkozó téziseket ismertetjük két téziscsoportban, a [2, 3, 7, 8] publikációk alapján.

1. téziscsoport:
A felismerhetőség és a színezhetőség bonyolultsága

A disszertációban két olyan fontos típusát tanulmányozzuk a vegyes hipergráfoknak, amelyekre hatékony színezési algoritmus adható.

A perfektség központi jelentőségű fogalom a klasszikus gráfszínezési elméletben. Egyrészt a gráfok több fontos típusa jelenik meg a perfekt gráfok részosztályaként, másrészt sok olyan optimalizációs probléma ismeretes, amelyek általánosságban NP-nehezek, de a perfekt gráfok körében polinomiális időben megoldhatók.

Voloshin vezette be a $\mathcal{C}$-perfektség fogalmát [42], amely a klasszikus gráfperfektség megfelelőjének tekinthető a $\mathcal{C}$-élek vonatkozásában. Ugyanezen cikkben fogalmazódott meg egy alapvető sejtés a csak $\mathcal{C}$-éleket tartalmazó $\mathcal{C}$-perfekt hiperfák szerkezetével kapcsolatban.

Ezen a ponton néhány újabb fogalom bevezetésére van szükségünk. Egy $\mathcal{H}$ vegyes hipergráf $\mathcal{C}$-függetlenségi számának ($\alpha_C(\mathcal{H})$) nevezzük azt a legnagyobb k számot, amelyre kiválasztható k darab csúcs úgy, hogy egyetlen $\mathcal{C}$-élt se tartalmazzon teljes egészében. A színezhető $\mathcal{H}$ hipergráf $\mathcal{C}$-perfekt, ha bármely feszített részhipergráfjára a $\mathcal{C}$-függetlenségi szám egyenlő a felső kromatikus számmal. Továbbá, a $\mathcal{H}$ hiperfa olyan hipergráf, amelynek csúcshalmazán megadható egy G fagráf, amelyen $\mathcal{H}$ bármely hiperéle egy részfát határoz meg. Az egyközepű hipercsillag olyan vegyes hipergráf, amelyben a $\mathcal{C}$-élek metszete pontosan egy csúcsot tartalmaz. Az előző definíció közvetlen alkalmazásával adódódik, hogy ez nem lehet $\mathcal{C}$-perfekt.

A disszertációban bizonyítást nyer a $\mathcal{C}$-perfekt $\mathcal{C}$-hiperfák strukturális karakterizációját adó, 1995 óta fennálló sejtés.

1.1. Tézis *(3. Következmény) Egy $\mathcal{C}$-hiperfa akkor és csakis akkor $\mathcal{C}$-perfekt, ha nem tartalmaz egyközepű hipercsillagot feszített részhipergráfként. Továbbá, egy $\mathcal{C}$-perfekt $\mathcal{C}$-hiperfához polinomiális időben megadható egy $\bar{\chi}$-színezés.*

A disszertációban a karakterizációs tétel és a polinomiális idejű $\bar{\chi}$-színezhetőség a $\mathcal{C}$-perfekt vegyes hiperfák egy bővebb részosztályára van kimondva és igazolva, ugyanakkor azt is megmutatjuk, hogy a karakterizáció nem terjeszthető ki a vegyes hiperfák teljes osztályára.

Az előző tételhez kapcsolódóan egy felettébb váratlan bonyolultsági eredményt is bizonyítunk.

1.2. Tézis *(4. és 5. Tétel) A következő eldöntési problémák* NP*-teljesek a $\mathcal{C}$-hiperfák osztályán:*

- *A $\mathcal{T}$ hiperfa tartalmaz-e egyközepű hipercsillagot feszített részhipergráfként?*
- *A $\mathcal{T}$ hiperfa színezhető-e pontosan $\alpha_C(\mathcal{T})$ színnel?*

A $\mathcal{C}$-perfekt $\mathcal{C}$-hiperfákra megadott polinomiális idejű $\bar{\chi}$-színezési algoritmus alkalmazható a $\mathcal{C}$-hiperfákra általában is, így eredményül vagy egy $\bar{\chi}$-színezést vagy pedig a $\mathcal{C}$-perfektséget cáfoló bizonyítékot kapunk.

1.3. Tézis *(6. Tétel) A $\mathcal{C}$-hiperfák osztályán létezik olyan polinom idejű algoritmus, melynek kimenete vagy egy feszített részhipergráf, amely egyközepű hipercsillag, vagy pedig a $\mathcal{T}$ hiperfa jó színezése $\alpha_C(\mathcal{T}) = \bar{\chi}(\mathcal{T})$ színnel.*

Ha összevetjük a fenti állításokat, egy elég ritkán előforduló szituációt tapasztalunk: a perfekt $\mathcal{C}$-hiperfák színezése algoritmikusan könnyű, míg a felismerésük nehéz probléma, pedig a karakterizáció nagyon egyszerűen megadható egy tiltott feszített részhipergráf típus segítségével.

A klasszikus értelemben vett hipergráfokhoz, és hasonlóképpen a $\mathcal{C}$-hipergráfokhoz mindig létezik megfelelő színezés, és lineáris időben felismerhetők azon speciális hipergráfok, amelyekre a színosztályok csak egyféleképpen hozhatók létre. Vegyes hipergráfok esetében azonban a két ellenkező értelmű partíciós feltétel kölcsönhatása sokkal összetettebb és kötetlenebb szerkezetet enged meg az egyértelműen színezhető esetekre. Amint az már korábban bizonyítást nyert [40], az egyértelműen színezhető vegyes hipergráfok felismerési problémája még akkor is co-NP-teljes, ha csak a színezhető hipergráfokon tekintjük. Mindemellett, már több éve megfogalmazódott az az elképzelés, hogy az úgynevezett ,,UC-rendezhető" vegyes hipergráfok hatékonyan felismerhetők. A ,,UC-rendezhetőség" azt jelenti, hogy létezik a hipergráf csúcsainak olyan $x_1, \ldots, x_n$ sorbarendezése, amelynek bármely i hosszúságú $x_1, \ldots, x_i$ kezdőszelete ($1 \leq i \leq n$) egyértelműen színezhető hipergráfot indukál. Az előzetes várakozást cáfolja a disszertáció itt következő állítása.

1.4. Tézis *(7. Tétel) Ha bemenetként adott egy egyértelműen színezhető $\mathcal{H}$ vegyes hipergráf a megfelelő színezésével együtt, annak eldöntése, hogy $\mathcal{H}$ UC-rendezhető-e,* NP*-teljes probléma.*

Ugyanakkor, lineáris időben eldönthető, hogy színek egy adott sorrendjéhez létezik-e olyan vegyes hipergráf, melynek pontosan egy UC-sorrendje[3] van, és ennek megfelelő színezését adja a megadott színsorrend (8. Tétel).

2. téziscsoport: Uniform vegyes hipergráfok

Ha egy hipergráf minden éle pontosan r darab csúcsot tartalmaz, akkor r-uniformnak nevezzük. Az ilyen tulajdonságú halmazrendszerekre több szempontból is megkülönböztetett figyelem irányul. A disszertáció két hosszabb ideje nyitott probléma megoldását tartalmazza az r-uniform vegyes illetve speciálisan a bi-[4] és $\mathcal{C}$-hipergráfok köréből.

A lehetséges színszámhalmazok jellemzése már korábbról ismeretes volt a vegyes hipergráfokra általában, és ennek sok fontos részosztályára is. Bizonyítást nyert például, hogy az intervallum hipergráfokra [22], a hiperfákra (Král', Kratochvíl, Proskurowski, Voss [25]), a cirkuláris hipergráfokra (Král', Kratochvíl, Voss [26]) és azon esetekben, amikor nincs kettőnél nagyobb fokszámú csúcs [27] a vegyes hipergráfok színszámhalmaza szakadásmentes.

Viszont a fenti kérdés megválaszolatlan volt két fontos részosztály, az r-uniform vegyes hipergráfok és a bi-hipergráfok esetére. A disszertációban a két esetet együtt vizsgálva, egy többlépéses konstrukció által adunk választ a kérdésekre. Azt bizonyítjuk, hogy r-uniform valamint bi-hipergráfok (sőt, r-uniform bi-hipergráfok) esetén is lehet szakadás a színszámhalmazban, és a karakterizációs tétel értelmében csak bizonyos, triviálisan adódó szükséges feltételeknek kell megfelelnie egy S halmaznak ahhoz, hogy valamely r-uniform illetve bi-hipergráf színszámhalmazaként előállítható legyen.

[3] Pontosabban fogalmazva, a hipergráfnak az első két csúcs felcserélésétől eltekintve egyértelmű a UC-sorrendje.

[4] Egy vegyes hipergráfot bi-hipergráfnak nevezünk, ha összes hiperéle egyszerre $\mathcal{D}$- és $\mathcal{C}$-él is.

2.1. Tézis *(1. Tétel) Legyen adott egy $r \geq 3$ egész szám, és egy S véges nemüres halmaz, amely pozitív egészeket tartalmaz. Akkor és csakis akkor létezik olyan $\mathcal{H}$ r-uniform vegyes hipergráf (legalább egy éllel), amelynek színszámhalmaza $\Phi(\mathcal{H}) = S$, ha*

(*i*) $\min(S) \geq 2$ *és S tartalmazza az összes* $\min(S)$ *és $r-1$ közötti egész számot*
(ez nyilván csak $\min(S) < r-1$ *esetén jelent megszorítást), vagy*

(*ii*) $\min(S) = 1$ *és $S = \{1, \ldots, \bar{\chi}\}$ alakú szakadásmentes halmaz valamely* $\bar{\chi} \geq r-1$ *egész számra.*

Továbbá, S valamely r-uniform bi-hipergráf színszámhalmaza, ahol $\mathcal{C} = \mathcal{D} \neq \emptyset$, akkor és csakis akkor, ha eleget tesz az (*i*) *kikötésnek.*

Figyelembe véve, hogy az élt tartalmazó bi-hipergráfok színezésében mindig egynél több színt kell használni, az előző állítás maga után vonja a következő karakterizációt is: Egy pozitív egészeket tartalmazó véges S halmaz akkor és csakis akkor áll elő valamely bi-hipergráf színszámhalmazaként, ha $1 \notin S$.

Egy másik, régebbről nyitott probléma az n csúcsot tartalmazó r-uniform $\mathcal{C}$-hipergráfokkal kapcsolatos. Ezekre a hipergráfokra bármely legfeljebb $r-1$ színt használó színezés megfelelő partíciót hoz létre. A kérdés az, hogy n és r függvényében legkevesebb hány $\mathcal{C}$-él szükséges ahhoz, hogy a $\mathcal{C}$-hipergráf $(r-1)$-nél több színnel ne legyen színezhető (11. Probléma [42]-ből és 2. Probléma a [43] monográfia 43. oldalán).

Erre a minimális élszámra korábbról ismeretes volt egy alsó becslés (Diao, Zhao, Zhou [15]), amely a 3-uniform esetre pontos értéket ad, amint ezt egy későbbi cikkben Diao, Liu, Rautenbach és Zhao bebizonyították [14]. De a 3-nál nagyobb r értékekre nyitott maradt az élesség, sőt egyáltalán az aszimptotikus élesség kérdése is.

A disszertációban egyrészt megmutatjuk, hogy tetszőleges $r > 3$ egészre végtelen sok olyan n érték van, amikoris az alsó becslés nem pontos. Másrészt aszimptotikusan pontos becslést bizonyítunk a $\mathcal{C}$-élek $f(n,r)$-rel jelölt minimális számára.

2.2. Tézis *(2. Tétel) Az $r-1$ felső kromatikus számú, r-uniform $\mathcal{C}$-hipergráfok $f(n,r)$-rel jelölt minimális élszámára vonatkozóan minden $n > r > 2$ egész esetén teljesülnek a következők:*

(*i*) $f(n,r) \leq \frac{2}{n-1}\binom{n-1}{r} + \frac{n-1}{r-1}\left(\binom{n-2}{r-2} - \binom{n-r-1}{r-2}\right)$ *minden n és r értékre.*

(*ii*) $f(n,r) = (1+o(1))\,\frac{2}{r}\binom{n-2}{r-1}$ *amennyiben $n \to \infty$ és $r = o(n^{1/3})$.*

Megjegyezzük, hogy ezt a problémát egy általánosabb összefüggésben, az úgynevezett „partíció-keresztező halmazrendszerek”[5] körében is vizsgálhatjuk. Így a fenti tétel egy új kutatási irány egyik kiindulópontja [8, 9], de ez nem kapcsolódik szorosan a disszertáció többi részéhez, így ott nem is tárgyaljuk részletesen.

Új modellek: A színhatárolt és a stab-hipergráfok

A színhatárolt és a stab-hipergráfok az [1, 4, 5, 6] cikkjeinkben kerültek bevezetésre. Ezen hipergráf-osztályok általánosítják egyrészt a vegyes hipergráf fogalmát, másrészt azt a Drgas-Burchardt és Łazuka által a kromatikus polinomokkal összefüggésben vizsgált modellt, ahol csak a színek számára adott alsó korlát szerepelt [16]; és néhány korábbi eredményt [11, 29, 36] is, ahol csak a monokromatikus felső korlátot használták bizonyos algoritmusok esetében. A stab- (és ugyanígy a színhatárolt) hipergráfok bevezetésével nem csupán a korábbi színezési típusok közös általánosításához jutunk, hanem, amint ez több különböző szempontból is igazolást nyer a disszertációban, egy lényegesen erősebb modellt kapunk.

Az általánosabb fogalom meghatározásával kezdve, a stab hipergráf egy rendezett hatosként van definiálva:

$$\mathcal{H} = (X, \mathcal{E}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : \mathcal{E} \to \mathbb{N}.$$

Az $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ hozzárendeléseket színkorlát függvényeknek hívjuk. (Feltételezzük, hogy $1 \le \boldsymbol{s}(E_i) \le \boldsymbol{t}(E_i) \le |E_i|$ és $1 \le \boldsymbol{a}(E_i) \le \boldsymbol{b}(E_i) \le |E_i|$ teljesül minden E_i hiperélre.) Ezen korlát függvények a hipergráf csúcsszínezésekor jutnak meghatározó szerephez. Ha az E_i hiperél legnagyobb méretű polikromatikus illetve monokromatikus részhalmazai[6] által tartalmazott csúcsok számát rendre $\pi(E_i)$ illetve $\mu(E_i)$ jelöli, a $\varphi : X \to \mathbb{N}$ csúcsszínezés akkor tekintendő megfelelőnek, ha minden E_i hiperélre

$$\boldsymbol{s}(E_i) \le \pi(E_i) \le \boldsymbol{t}(E_i) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{a}(E_i) \le \mu(E_i) \le \boldsymbol{b}(E_i)$$

teljesül. Vagyis az $\boldsymbol{s}(E_i)$ és a $\boldsymbol{t}(E_i)$ polikromatikus határok az E_i hiperélen előforduló színek számát korlátozzák, míg az élen elő kell fordulnia legalább $\boldsymbol{a}(E_i)$ azonos színű csúcsnak, viszont $\boldsymbol{b}(E_i)$-nél többször semely szín nem szerepelhet.

Ha egy alsó színkorlát függvény ($\boldsymbol{s}$ vagy $\boldsymbol{a}$) mindenhol konstans 1 értéket vesz fel, vagy valamely felső korlát függvény ($\boldsymbol{t}$ vagy $\boldsymbol{b}$) minden E_i élhez az él $|E_i|$ méretét rendeli, akkor ez nem jelent valódi megszorítást a színezésre vonatkozóan, ezért az adott függvény el is hagyható. Törölve ezeket a nem-valódi korlát függvényeket az $\{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ halmazból, az így nyert hipergráf-osztályokat a valóban korlátozó

[5] Egy X halmaz valamely $\mathcal{P} = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ partíciója és egy $Y \subseteq X$ esetén azt mondjuk, hogy az Y részhalmaz keresztezi a $\mathcal{P}$ partíciót, ha pontosan $\min(|Y|, k)$ partíciós osztályt metsz. Egy $Y_1, Y_2, \dots, Y_j$ halmazrendszer keresztezi a partíciót, ha legalább egy Y_i keresztezi azt.

[6] Csupa különböző illetve csupa azonos színű csúcsot tartalmazó részhalmazok.

függvények jelének megfelelő nagybetűk felsorolásával jelöljük. Így például, az (S,T)-hipergráf elnevezés azt jelenti, hogy csak a hiperélenként előforduló színek számára vonatkozhatnak a kikötéseink.

Elsőként az (S,T)-hipergráfok kerültek bevezetésre ,,színhatárolt hipergráfok" elnevezéssel. Vizsgálatuknál egyrészt bizonyos speciális részosztályok szerepének tanulmányozása volt a cél, másrészt fontos szempont volt a vegyes hipergráfokkal közös illetve azokétól eltérő jellemzők feltárása.

3. téziscsoport: Színhatárolt hipergráfok színszámhalmazai

A színhatárolt hipergráfok valamely részosztályát vizsgálva, az első alapvető kérdés az, hogy vajon előfordulhat-e szakadás az idetartozó hipergráfok színszámhalmazaiban. Korábbról ismert volt, hogy a vegyes intervallum hipergráfok[7] esetén szakadás nem fordulhat elő [22], és az alsó kromatikus szám legfeljebb 2. A disszertációban ennek a tételnek az általánosítását bizonyítjuk színhatárolt intervallum hipergráfok esetére. Továbbá a tétel igaznak bizonyul egy ennél bővebb részosztályra is, mégpedig az úgynevezett RDP hiperfákra (Rooted Directed Path hypertree), ahol minden hiperél valamely gyökér – levél út összefüggő részét alkotja egy gyökereztetett bázisfán.

> **3.1. Tézis** *(14. és 15. Tétel) Bármely színezhető színhatárolt intervallum hipergráfra és RDP hiperfára igaz, hogy színszámhalmaza szakadásmentes és az alsó kromatikus száma egyenlő az* **s** *színkorlát függvény maximális értékével.*

Jelentős különbségeket találunk viszont a két modell között, ha általánosságban tekintjük a hiperfákat. Míg vegyes hiperfák esetében csakis azon speciális tulajdonságú színszámhalmazok fordulhatnak elő, mint az intervallum hipergráfoknál, addig a színhatárolt esetben a hiperfáknak különleges szerepe van ebben a vonatkozásában. A hiperfa szerkezete meglehetősen kötött, a színhatárolt hiperfákon mégis megjelenik a lehetséges színszámhalmazok döntő többsége. Az egyetlen különbség az általános esethez képest az, hogy a két színnel színezhető hiperfáknál nem fordulhat elő szakadás a színszámhalmazban.

[7] Intervallum hipergráfnak nevezzük az olyan hiperfákat, ahol a bázisgráf megadható egy útként.

3.2. Tézis *(16. és 17. Tétel) Legyen S a pozitív egész számok halmazának valamely véges nemüres részhalmaza. Akkor és csakis akkor van olyan $\mathcal{T}$ színhatárolt hiperfa, amelynek színszámhalmaza S, ha*

(i) $\min(S) = 1$ *vagy* $\min(S) = 2$*, és S tartalmaz minden* $\min(S)$ *és* $\max(S)$ *közti egész számot, vagy*

(ii) $\min(S) \geq 3$.

Ugyanez az állítás érvényes az r-uniform színhatárolt hiperfák osztályára is bármely rögzített $r \geq 4$ érték esetén. Továbbá, egy másik irányban megerősíthető az állítás úgy is, hogy bármely S színszámhalmaz esetén, ha $\min(S) \geq 3$, akkor minden $k \in S$ értékre a megfelelő k-osztályú színpartíciók száma is tetszőlegesen előírható (14. Következmény).

A vegyes és a színhatárolt hiperfák szerepe közti eltérés nem csak a színszámhalmazok tekintetében mutatkozik meg, hanem a színezhetőségi probléma algoritmikus bonyolultságát illetően is. A vegyes hiperfák színezhetősége lineáris időben eldönthető [39], míg ugyanezen probléma színhatárolt hiperfákra már a 3-uniform esetben is NP-teljesnek bizonyult, amint ezt az állítást a 4.2. Tézis tartalmazni is fogja.

Másrészről, sikerült azonosítani néhány részosztályt, amelyen a színezhetőség kérdése polinomiális időben eldönthető. Ilyen például a 3-uniform intervallum hipergráfok osztálya, valamint azon hipergráfok osztálya, amelyeknél a részben átfedő hiperélek tiltottak, vagyis ha két él nem diszjunkt, akkor a kisebbik részhalmaza a nagyobbnak.

A színhatárolt cirkuláris hipergráfok színszámhalmazaira vonatkozóan szükséges feltételek kerültek bizonyításra (19. Tétel).

4. téziscsoport: Stab-hipergráfok

Visszatérve a stab-hipergráfok színezési kérdéseire, fő eredményeink a különböző színkorlát függvény kombinációk alkalmazásával nyert modellek összehasonlításaival kapcsolatosak.

A felső korlátot adó $\boldsymbol{t}$ és $\boldsymbol{b}$ függvények mindig helyettesíthetők az $\boldsymbol{a}$ és az $\boldsymbol{s}$ korlátok megfelelő alkalmazásával, bár ez a redukció általában jelentősen növeli a hiperélek számát, továbbá a korábbi struktúrális tulajdonságokat (pl. hiperfa, uniformitás) is megváltoztatja. Az $\boldsymbol{s}$ és az $\boldsymbol{a}$ alsó színkorlátokkal adott feltételek viszont — bizonyos speciális esetektől eltekintve — nem fejezhetők ki a $\boldsymbol{t}$ és a $\boldsymbol{b}$ függvényekkel. Ebben az értelmében az (S,A)-modell az egyetlen ,,univerzálisnak" mondható a színkorlát függvény párok alkalmazásával nyerhető hipergráf-osztályok közül.

A (T,A)- és az (S,B)-hipergráfok mindig színezhetők és színszámhalmazuk szakadásmentes. Ellenben a többi pár által meghatározott struktúra-osztályok mindegyikében megjelennek színezhetetlen hipergráfok, illetve olyanok is, amelyeknek színszámhalmazában szakadás van. De ezekben a modellekben is eltérő választ kapunk, ha azt vizsgáljuk, hogy legkevesebb hány csúcs szükséges ahhoz, hogy a színszámhalmazban megjelenhessen egy k méretű szakadás.[8]

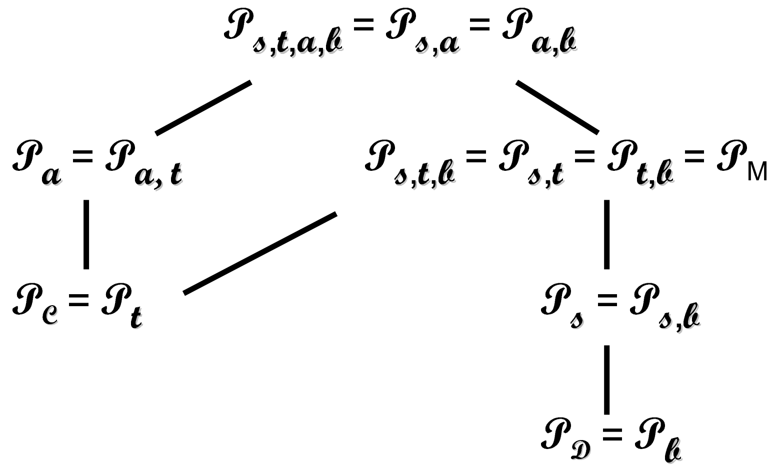
> **4.1. Tézis** *(10., 20. és 21. Tétel)*
>
> - *Ha egy (T, A, B)-, (T, B)- vagy (A, B)-hipergráf színszámhalmazában $k \geq 1$ méretű szakadás van, akkor csúcsainak száma legalább $2k + 4$.*
> - *Ha egy (S, A)-, (S, T)- vagy stab-hipergráf színszámhalmazában $k \geq 1$ méretű szakadás van, akkor csúcsainak száma legalább $k + 5$.*
>
> *Az állításokban szereplő korlátok élesek.*

A színezhetőség eldöntése már a 3-uniform (S,T)-hiperfákra is NP-teljesnek bizonyult. Ez a megállapítás kiterjeszthető valamennyi struktúraosztályunkra, ahol a színezhetetlenség kérdése egyáltalán felmerül.

> **4.2. Tézis** *(18. és 23. Tétel) A színezhetőség eldöntési problémája az alábbi hipergráf osztályok mindegyikén NP-teljes:*
>
> - *3-uniform (S, T)-hiperfák,*
> - *3-uniform (S, A)-hiperfák,*
> - *3-uniform (T, B)-hiperfák,*
> - *3-uniform (A, B)-hiperfák.*

Bár általában véve nehéz megállapítani, hogy egy vegyes hipergráf egyértelműen színezhető-e, azok az esetek kivételt képeznek, amikor a felső kromatikus szám nagyon közel van a csúcsok n-nel jelölt számához. Niculitsa és Voss karakterizálta az $n-1$ illetve $n-2$ színnel egyértelműen színezhető vegyes hipergráfokat [33], ami egyúttal polinomiális idejű algoritmusokat is adott a felismerésükre. Mindazonáltal, a disszertációban megmutatjuk, hogy az egyértelműen $(n-1)$-színezhető (S,A)- és (S,T)-hipergráfok felismerése NP-nehéz. Viszont az egyértelműen $(n-1)$-színezhető (T,B)- és (A,B)-hipergráfokra bizonyított (eléggé technikai jellegű) karakterizációs tételünk polinom-idejű felismerő algoritmusokat eredményez.

[8] Ha a színszámhalmaz tartalmazza a k' és a k'' egészeket, melyekre $k' + 1 < k''$, de a két érték közötti egész számok közül egyet sem, akkor a szakadás mérete definíció szerint $k = k'' - k' - 1$.



1. ábra. A különböző struktúraosztályokhoz tartozó kromatikus polinom halmazok kapcsolatát ábrázoló Hasse-diagram. Az indexben szereplő kisbetűk a megfelelő színkorlát függvényekre, a $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ és M jelzések pedig rendre a $\mathcal{C}$-, $\mathcal{D}$- illetve a vegyes hipergráfokra utalnak.

4.3. Tézis *(12., 24. és 27. Tétel)*

- *Az egyértelmű* $(n-1)$*-színezhetőség eldöntése* co-NP*-teljes probléma az (S,A)-, (S,T)- és a stab-hipergráfok körében.*
- *Az egyértelmű* $(n-1)$*-színezhetőség eldöntési problémája polinomiális időben megoldható a (T,B)-, (A,B)- és a (T,A,B)-hipergráfok körében.*

5. téziscsoport: Kromatikus polinomok

Utolsó tézisként egy olyan eredményt szeretnék kiemelni, amely egyaránt vonatkozik a vegyes, a színhatárolt és a stab-hipergráfokra, továbbá a matematika egy másik ágához is kapcsolódik.

Egy adott $\mathcal{H}$ hipergráf vagy gráf kromatikus polinomja alatt azt a $P(\lambda)$ polinomot értjük, amelynek helyettesítési értéke minden λ pozitív egész szám esetén megegyezik a $\mathcal{H}$ hipergráf legfeljebb λ színt használó jó színezéseinek számával. Ez esetben a színek permutálásával egymásba átvihető színezéseket is különbözőnek tekintjük. Az $S(n,k)$ kifejezés a másodfajú Stirling számokat[9] jelöli ($n \geq k > 0$).

[9] Az $S(n,k)$ másodfajú Stirling szám definíció szerint azon lehetőségek számával egyenlő, ahányféleképpen az n elem k darab nemüres partíciós osztályba sorolható.

5. Tézis *(9. Tétel) Legyen* $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda^k \not\equiv 0$ *olyan polinom, amelyre* $P(1) = 0$*, vagyis* $\sum_{k=0}^{\ell} a_k = 0$ *teljesül. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. $P(\lambda)$ *egy stab-hipergráf kromatikus polinomja.*
2. $P(\lambda)$ *egy színhatárolt hipergráf kromatikus polinomja.*
3. $P(\lambda)$ *egy vegyes hipergráf kromatikus polinomja.*
4. $P(\lambda)$ *kielégíti a következő feltételeket.*
   - *(i)* $P(\lambda)$ *minden* a_k *együtthatója egész szám.*
   - *(ii) Az* a_ℓ *főegyüttható pozitív.*
   - *(iii) Az* a_0 *konstans tag 0.*
   - *(iv) Minden* $j \leq \ell$ *pozitív egészre teljesül a*

     $$\sum_{k=j}^{\ell} a_k \cdot S(k,j) \geq 0$$

     egyenlőtlenség.

A $P(1) = 0$ feltétel értelmében ez a tétel csak az egy színnel nem színezhető hipergráfok kromatikus polinomjaira ad karakterizációt. A disszertációban a lehetséges kromatikus polinomok halmazait ezen megszorítás nélkül is összevetjük. Vizsgálataink azt mutatják, hogy az (S,A)-, az (A,B)- és a stab-hipergráfok kromatikus polinomjainak halmaza megegyező, míg ennél szűkebb halmaz tartozik az (S,T)-, (T,B)- és a vegyes hipergráfok osztályaihoz (22. Tétel, 31. és 32. Állítás). A többi osztályra vonatkozó összefüggés is leolvasható az 1. ábrán szereplő Hasse-diagramról.

Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt Tuza Zsolt professzor úrnak szeretném megköszönni a témavezetést. Az ő kivételes hozzáértése és nagyszerű irányítása döntő tényező volt a kutatásban való előrehaladásom szempontjából.

Köszönetet mondok a Pannon Egyetemnek és külön is Friedler Ferenc professzor úrnak a lehetőségért és a támogató környezetért, amit a kutatáshoz biztosítottak.

Köszönet a többfajta segítségért kollégáimnak a Számítástudomány Alkalmazása Tanszékről és kollégáimnak Nagykanizsáról. Továbbá szeretném megköszönni a Hibatűrő Rendszerek Kutatócsoportnál (BME) tartott szeminárium résztvevőinek a hipergráfok alkalmazási lehetőségeivel kapcsolatos beszélgetést.

Köszönöm családomnak a biztatást, és végül köszönetet mondok az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok keretében (OTKA T-049613) kapott anyagi támogatásért.

Hivatkozások

I. A disszertációhoz kapcsolódó publikációk

[1] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Mixed colorings of hypergraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 24 (2006), 273–275.

[2] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Orderings of uniquely colorable hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics* 155 (2007), 1395–1407. (Impact Factor 0.577)

[3] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Uniform mixed hypergraphs: The possible numbers of colors. *Graphs and Combinatorics*, 24 (2008), 1–12. (Impact Factor 0.175)

[4] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Color-bounded hypergraphs, I: General results. *Discrete Mathematics*, nyomtatás alatt. (Impact Factor 0.347)

[5] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Color-bounded hypergraphs, II: Interval hypergraphs and hypertrees. Manuscript, 2006, submitted. (A Discrete Mathematics vendégszerkesztői által elfogadva, várható Impact Factor 0.347)

[6] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Color-bounded hypergraphs, III: Model comparison. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 1 (2007), 36–55.

[7] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Voloshin's conjecture for $\mathcal{C}$-perfect hypertrees. Kézirat, 2007, benyújtva.

[8] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Smallest set-transversals of k-partitions. Kézirat, 2007.

[9] Cs. Bujtás, Zs. Tuza: Partition-crossing hypergraphs. Kézirat, 2007.

II. További hivatkozások

[10] K.I. Aardal, C.P.M. van Hoesel, A.M.C.A. Koster, C. Mannino, A. Sassano: Models and solution techniques for the frequency assignment problem. *4OR* 1 (4) (2003), 261–317.

[11] N. Ahuja, A. Srivastav: On constrained hypergraph coloring and scheduling. Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Computer Science* 2462 (2002), 14–25.

[12] A. Balogh, A. Pataricza, J. Rácz: Scheduling of embedded time-triggered systems. *EFTS '07: Proceedings of the 2007 Workshop on Engineering Fault Tolerant Systems.* ACM, 2007.

[13] M.B. Cozzens, F.S. Roberts: T-Colorings of graphs and the channel assignment problem. *Congressus Numerantium* 35 (1982), 191–208.

[14] K. Diao, G. Liu, D. Rautenbach, P. Zhao: A note on the least number of edges of 3-uniform hypergraphs with upper chromatic number 2. *Discrete Mathematics* 306 (2006), 670–672.

[15] K. Diao, P. Zhao, H. Zhou: About the upper chromatic number of a C-hypergraph. *Discrete Mathematics* 220 (2000), 67–73.

[16] E. Drgas-Burchardt, E. Łazuka: On chromatic polynomials of hypergraphs. *Applied Mathematics Letters* 20 (2007), 1250–1254.

[17] A. Eisenblätter, M. Grötschel, A.M.C.A. Koster: Frequency assignment and ramifications of coloring. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 22 (2002), 51–88.

[18] P. Erdős, A. Hajnal: On chromatic number of graphs and set systems. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 17 (1966), 61–99.

[19] A. Gamst, W. Rave: On frequency assignment in mobile automatic telephone systems. *Proceedings of GLOBECOM'82, IEEE* (1982), 309–315.

[20] J. R. Griggs, R. K. Yeh: Labeling graphs with a condition at distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5 (1992), 586–595.

[21] W. K. Hale: Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE* 68 (1980), 1497–1514.

[22] T. Jiang, D. Mubayi, V. Voloshin, Zs. Tuza, D. West: The chromatic spectrum of mixed hypergraphs. *Graphs and Combinatorics* 18 (2002), 309–318.

[23] D. Kaznachey, A. Jagota, S. Das: Neural network-based heuristic algorithms for hypergraph coloring problems with applications. *Journal of Parallel and Distributed Computing* 63 (2003), 786–800.

[24] D. Král': Mixed hypergraphs and other coloring problems. *Discrete Mathematics* 307 (7–8) (2007), 923–938.

[25] D. Král', J. Kratochvíl, A. Proskurowski, H.-J. Voss: Coloring mixed hypertrees. Proceedings of the 26th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Computer Science* 1928, (2000), 279–289.

[26] D. Král', J. Kratochvíl, H.-J. Voss: Mixed hypercacti. *Discrete Mathematics* 286 (2004), 99–113.

[27] D. Král', J. Kratochvíl, H.-J. Voss: Mixed hypergraphs with bounded degree: edge-coloring of mixed multigraphs. *Theoretical Computer Science* 295 (2003), 263–278.

[28] J. Kratochvíl, Zs. Tuza, M. Voigt: New trends in the theory of graph colorings: Choosability and list coloring. Contemporary Trends in Discrete Mathematics (R. L. Graham et al., eds.), *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* 49, AMS, 1999, 183–197.

[29] C.-J. Lu: Deterministic hypergraph coloring and its applications. *Proceedings of the 2nd International Workshop on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science*, 1998, 35–46.

[30] C. McDiarmid: Frequency-distance constraints with large distances. *Discrete Mathematics* 223 (2000), 227–251.

[31] C. McDiarmid, B. Reed: Channel asignment on graphs of bounded treewidth. *Discrete Mathematics* 273 (2003), 183–192.

[32] B.H. Metzger: Spectrum management technique. *Presentation at the 38th National ORSA meeting, Detroit, MI*, 1970.

[33] A. Niculitsa, H.-J. Voss: A characterization of uniquely colorable mixed hypergraphs of order n with upper chromatic numbers $n-1$ and $n-2$. *Australasian Journal of Combinatorics* 21 (2000), 167–177.

[34] A. Pataricza, A. Balogh, L. Gönczy: Verification and validation of nonfunctional aspects in enterprise. Enterprise Modeling and Computing with UML (P. Rittgen, ed.), Idea Group Publishing, 2007, 261–303.

[35] F.S. Roberts: New directions in graph theory (with an emphasis on the role of applications). *Annals of Discrete Mathematics* 55 (1993), 13–44.

[36] A. Srivastav, P. Stangier: Tight approximations for resource constrained scheduling and bin packing. *Discrete Applied Mathematics* 79 (1997), 223–245.

[37] Zs. Tuza: Graph colorings with local constraints — A survey. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 17 (1997), 161–228.

[38] Zs. Tuza, V. Voloshin: Problems and results on colorings of mixed hypergraphs. *Horizon of Combinatorics*, J. Bolyai Society Mathematical Studies, nyomtatás alatt.

[39] Zs. Tuza, V. Voloshin: Uncolorable mixed hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics* 99 (2000), 209–227.

[40] Zs. Tuza, V. Voloshin, H. Zhou: Uniquely colorable mixed hypergraphs. *Discrete Mathematics* 248 (2002), 221–236.

[41] V. Voloshin: The mixed hypergraphs. *Computer Science Journal of Moldova* 1 (1993), 45–52.

[42] V. Voloshin: On the upper chromatic number of a hypergraph. *Australasian Journal of Combinatorics* 11 (1995), 25–45.

[43] V.I. Voloshin: *Coloring Mixed Hypergraphs – Theory, Algorithms and Applications*. Fields Institute Monographs 17, AMS, 2002.

[44] V. Voloshin: Mixed Hypergraph Coloring Web Site:
http://spectrum.troy.edu/ voloshin/mh.html.