PANNON EGYETEM
GAZDÁLKODÁS- ÉS SZERVEZÉSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

Badics Tamás

ARBITRÁZS ÉS MARTINGÁLMÉRTÉK

Tézisgyűjtemény

Témavezető: Dr. Medvegyev Péter

Veszprém, 2011.

2011. február 14.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az eszközárazás elméletének egyik legalapvetőbb kérdése, hogy egy pénzpiaci modellt mikor tekintünk közgazdasági szempontból konzisztensnek és milyen matematikai tulajdonságokkal karakterizálható egy ilyen modell. Közgazdasági szempontból az arbitrázsmentesség feltevése, vagyis az a feltevés, hogy a pénzpiacon nem köthetünk olyan üzletet amin pozitív valószínűséggel nyerünk, anélkül hogy bármit is kockáztatnánk, nem tűnik túlságosan megszorítónak, és egészen megdöbbentő, hogy milyen szerteágazó következtetéseket lehet levonni ebből az ártalmatlannak tűnő feltevésből. A pénzügyi eszközök árazásának alaptételén általában olyan típusú állításokat értünk, amelyek a konzisztencia fenti közgazdasági követelményének és a pénzpiacot – pontosabban az eszközök árait – leíró sztochasztikus folyamat valamely matematikai tulajdonságának ekvivalenciájáról szólnak. Jelen értekezés célja részben az alaptétel szemimartingálokra vonatkozó irodalmának, valamint közgazdaságtani és matematikai előzményeinek áttekintése, részben pedig a szemimartingálokra vonatkozó elmélet didaktikus egységes keretben való tárgyalása, helyenként pedig az eredeti cikkekben található bizonyítások egyszerűsítése. Az értekezés egy újszerű vonása, hogy nem az árazás kérdésére öszpontosít, hanem az arbitrázselmélet és a klasszikus közgazdaságtan kapcsolódási pontjait kívánja hangsúlyozni.

A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele kissé pongyolán megfogalmazva azt állítja, hogy egy értékpapírpiacon akkor nincs „arbitrázs”, ha létezik egy az eredetivel ekvivalens valószínűségi mérték, amelyre vonatkozóan az értékpapírok diszkontált árait leíró folyamat egy bizonyos értelemben „martingál”, vagyis létezik olyan új valószínűségi mérték, amely alatt pénzügyi eszközök segítségével nem lehet szisztematikusan átlagban nyerni. Hogy egészen pontosak legyünk, az állítás ebben a formában inkább csak egy alapelv, ami akkor válik ténylegesen igazolható állítássá, ha pontosan definiáljuk az „arbitrázsmentesség” és „martingál" fogalmakat. Mint látni fogjuk, ezek pontos tartalma modellosztályonként eltérő lehet.

Az arbitrázsmentesség végső soron azt állítja, hogy a zérus indulóvagyon segítségével kereskedéssel révén elérhető nettó kifizetések között csak egy olyan van, amely nem negatív, nevezetesen az azonosan nulla. Vagyis az arbitrázsmentesség azt állítja, hogy két halmaz csak egy közös pontban metszi egymást. A közgazdasági matematikában triviálisan ismert észrevétel, hogy ez a helyzet jól jellemezhető a szeparáló hipersíkokról szóló tétellel, és a fenti összefüggésben a martingálmértéket a szeparáló hipersík együtthatói határozzák meg. A szeparációs tétel használatához két dolgot kell tenni: biztosítani kell, hogy a halmazok *konvexek* és hogy *zártak* legyenek. A konvexitás feltétele általában viszonylag egyszerűen garantálható, elég feltenni, hogy a lehetséges stratégiák konvex módon kombinálhatók legyenek. A stratégiai halmazok konvexitása egy olyan bevett és rutinszerűen használt feltétel a közgazdasági elméletben, amelynek használata jószerével már fel sem tűnik. Míg a stratégiai halmazok konvexitása például az általános egyensúlyelméletben széles körben használt, de azért vitatott feltétel, a pénzügyi elméletben minden további nélkül elfogadott. Miként látni fogjuk a probléma az elválasztandó halmazok zártságával van, amely zártság biztosítása az alább ismertetett tételek bizonyításának legfőbb nehézsége.

A fenti gondolatmenet minden különösebb bonyodalom nélkül kiterjeszthető a többdimenziós modellekre, mindaddig, amíg a probléma véges dimenziós marad, hiszen ezekben az esetekben a zérus indulóvagyon segítségével kereskedés révén elérhető nettó kifizetések halmaza – a továbbiakban K halmaz – triviálisan zárt, mivel tetszőleges topologikus vektortér véges dimenziós altere zárt. A releváns dinamikus sztochasztikus modellekben azonban a feltételes követelések tere tipikusan végtelen dimenziós, és – ahogy funkcionálanalízisből tudjuk – ilyenkor a matematikai problémák zöme topológiai természetű, így többek között a K zártsága sem fog automatikusan teljesülni, sőt ennek igazolása teszi ki a bizonyítások túlnyomó részét.

Az alaptétel szokásos végesdimenziós tankönyvi bizonyítása jól mutatja az arbitrázsárazás lényegét, ám több szempontból félrevezető. A modell egy speciális vonása a véges számú periódus feltételezése. Mivel végtelen számú kereskedési periódus esetén, korlátlan erőforrásra támaszkodva, egy valószínűséggel biztos pozitív kifizetéshez juthatunk, ezért ezeket a stratégiákat ki kell zárnunk a lehetséges stratégiák közül. Ennek eredményeképpen a K halmaz általános esetben már nem altér, hanem csak kúp lesz. A végesdimenziós modell egy másik kellemes tulajdonsága, hogy a primer tér – általános egyensúlyelméleti terminológiát használva a jószágtér, vagyis esetünkben a feltételes követelések tere – és a duális tér – vagyis az árrendszert, speciálisan a martingálmértéket tartalmazó tér – ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázolható. Általánosabb, és egy kicsit precízebb megfogalmazásban, tetszőleges n-dimenziós szeparált topológikus vektortér topológikusan izomorf az $\mathbb{R}^n$ térrel, így ebben az esetben nincs értelme sem a topológia absztrakt fogalmának bevezetésének, sem a primer- és duális terek megkülönböztetésének. Végtelen dimenziós topológikus vektortérben azonban a topológia megválasztása már nem egyértelmű, ezért jóval nehezebb biztosítani hogy mind a primer tér, mind annak topológikus duálisa illeszkedjen a közgazdasági problémához. Ez legtöbbször sem a végtelen dimenziós általános egyensúlyelméletben, sem az arbitrázselméletben nem teljesül. Ilyenkor a célnak megfelelő árrendszer létezését mind az általános egyensúly-elméletben, mind az arbitrázselméletben a szereplők preferenciáira vonatkozó megkötésekkel lehet biztosítani.

A martingálmérték létezéséről szóló első állítást M. Harrison és S. R. Pliska [25] bizonyítják arra az esetre, amikor a valószínűségi mező végesen generált. Azóta a tételnek számos általánosítása született. Ezek közül az egyik legismertebb a Dalang–Morton–Willinger-tétel (ld.:[10]), ami már teljesen általános valószínűségi mezőből indul ki, de felteszi, hogy az időparaméter diszkrét és az időhorizont véges. Szintén úttörő jelentőségű Krepsnek az az eredménye (ld. [36]), miszerint az ún. „nincs ingyenebéd"[1] feltétel egyenértékű az ekvivalens martingálmérték létezésével. Bár Kreps ezen eredménye már szemimartingál modellekre is alkalmazható, az ebben szereplő „nincs ingyenebéd" fogalom sajnos közgazdaságtanilag nehezen interpretálható. Szemimartingál modellekre a probléma

[1] Ld.: 4. lábjegyzet.

kielégítőnek tekinthető megoldását végülis F. Delbaen és W. Schachermayer adják meg ([11] és [12]). Ez utóbbi eredmény a pénzügyi matematika egyik csúcsteljesítménye. Bizonyítása igen hosszadalmas, és a funkcionálanalízis valamint a sztochasztikus folyamatok – P. A. Meyer és a strassbourgi-iskola matematikusai által a 60-as évek végétől kezdve kidolgozott – általános elméletének mély eredményeit használja. Bár a Delbaen–Schachermayer-tétel bizonyítását Kabanov [31] némileg egyszerűsítette, meggyőződésünk szerint annak bizonyítása továbbra is csak kevesek által hozzáférhető. Kevésbé ismert, hogy az alaptételnek létezik egy közgazdaságtanilag a Delbaen–Schachermayer-tétellel azonos tartalmú és mélységű, Frittelli nevéhez fűződő változata (ld.:[21] és [22]), amely az arbitrázsmentesség preferenciák segítségével történő karakterizációján alapul, és melynek bizonyítása jóval egyszerűbb matematikai eszközöket igényel.

2. Az értekezés felépítése, eredményei és a felhasznált módszerek

Mivel tárgyalásunkban a fő hangsúly egyértelműen a szemimartingálokra vonatkozó elmélet áttekintése, ezért a bemutatott – többnyire jóval egyszerűbben interpretálható – véges dimenziós esetek, a diszkrét idejű folyamatokra valamint a Wiener folyamatra vonatkozó eredmények elsősorban az egyes témák és fogalmak intuitív bevezetését szolgálják, ennek megfelelően ezen speciális esetek tárgyalása többnyire kevésbé precíz, helyenként pedig vázlatos, annál is inkább, mert ezen eredmények nagy részének igényes tárgyalása megtalálható az idézett monográfiákban és tankönyvekben. Ez alól kivételt képez a portfolió dualitáselméletéről szóló 5.1. alfejezet, ami a konvex analízis dualitási módszereinek, így például a Lagrange-dualitás, az erős- és gyenge dualitási tételek alkalmazására hívja fel a figyelmet, ezért kissé eltér az eredeti – és valamivel elemibb – [13]-beli tárgyalástól. A szemimartingálokra vonatkozó fejezetekben azonban minden esetben törekedtünk a lehető legprecízebb kifejtésre, valamint részletes bizonyítások és hivatkozások közlésére. Az ezen fejezetekben felhasznált matematikai apparátus magában foglalja a topológiát, a mértékelméletet, a funkcionálanalízis dualitáselméletét, a Hilbert-terek elméletét, a halmazelméletet, a sztochasztikus folyamatok általános elméletének viszonylag új fejezeteit, valamint a konvex analízis és az Orlicz-terek elméletének néhány eredményét.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy az értekezés szándékosan nem foglalkozik sem az eszközárazás konkrét problémáival, így a Black–Scholes- és Cox–Ross–Rubinstein-modellel, vagy ezek külünféle változataival, sem a kereskedés tranzakciós költségeit is figyelembevevő modellekkel. Bár a terület az értekezés témájával igen szoros kapcsolatban van, terjedelmi okokból szintén nem foglalkozunk sem a pénzügyi eszközök árazásának második alaptételével, sem általánosságban a pénzpiacok teljességének problémájával.

Az értekezés második fejezete bemutatja azokat a fontosabb közgazdaságtani és matematikai előzményeket, amelyek a Delbaen–Schachermayer-tétel bizonyításához elvezettek. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a martingálmérték fogalma szorosan kapcsolódik a bizonytalanság melletti általános egyensúlyelmélet Arrow–Debreu-féle modelljéhez, valamint a Radner-egyensúly fogalma segítségével ismertetjük a martingálmérték egy lehetséges közgazdasági interpretációját. Megmutatható, hogy a martingál mérték valójában egy a replikálható portfoliók alteréről az összes feltételes követelések terére kiterjesztett árazó funkcionált reprezentál, ennek megfelelően ebben a fejezetben az alaptétel mint az árazó funkcionál kiterjeszthetőségének problémája jelenik meg.

Ugyancsak a második fejezetben adjuk meg az arbitrázs pontos definícióját kétperiódusos modellre, majd rámutatunk hogy általános valószínűségi mező, vagyis – általános egyensúlyelméleti analógiával élve – végtelen dimenziós jószágtér esetén az arbitrázsmentesség már nem elégséges feltétele a kiterjesztett árazó funkcionál létezésének, ezért szükséges az arbitrázsmentességnél erősebb fogalmak, az *életképesség* és *nincs ingyenebéd* fogalmak bevezetése. Látni fogjuk, hogy az alaptétel végtelen dimenzióra való kiterjesztése nem zökkenőmentes, a fellépő topológiai problémák miatt a funkcionálanalízis klasszikus szeparációs tételei nem alkalmazhatóak. Mint említettük, a véges dimenziós esettől eltérően, a végtelen dimenziós esetben explicit módon meg kell különböztetni a primer teret a duálisától. Ebben az esetben a szeparáló hipersíkoknak a duális tér elemei felelnek meg. Kézenfekvő, hogy a feltételes követelések terének valamilyen L^p teret válasszunk. Ekkor azonban ugyanazzal a matematikai problémával találjuk szemben magunkat, amivel az általános egyensúlyelmélet is sokáig küzdött az 1950-es 60-as és 70-es években. Az általános egyensúlyelméletben a jószágtér általában valamely L^p tér, az egyensúlyi árrendszer pedig egy a jószágtéren értelmezett folytonos lineáris funkcionál, vagyis az L^p duálisának eleme. Bárhogy is választjuk meg a p-t a klasszikus Hahn–Banach típusú tételek alkalmazása nem problémamentes. Ha $p < \infty$ (ld. pl. [16], [26] és [10]), akkor problémát okoz hogy az L^p tér pozitív ortánsának nincs belső pontja, ezért a Hahn–Banach-tétel nem alkalmazható. Ha viszont $p = \infty$, akkor, mivel az L^∞ térnek a duálisa egy az L^1 térnél bővebb halmaz, az árrendszer nem feltétlenül reprezentálható skalárszorzatként (ld.: [30]). Legtöbb közgazdasági alkalmazásban a jószágtér az L^∞ tér. Az általános egyensúlyelméletben az árrendszer L^1-beliségét ilyenkor a preferenciákra vonatkozó megkötésekkel lehet biztosítani (ld. pl. [4] és [39]). Nem nyilvánvaló azonban, hogy az arbitrázselméletben alkalmazott szokásos feltételnek (ld.:[11]) mi köze van a befektetők preferenciáihoz. A dolgozat egyik célja ennek a kapcsolatnak a tisztázása.

Kreps [36] bebizonyítja, hogy az életképesség bizonyos „szeparabilitási" feltételek esetén ekvivalens a nincs ingyenebéd feltétellel, ezért a nincs ingyenebéd feltétel ekvivalens a kiterjesztett árazófunkcionál – és ezért az ekvivalens martingálmérték – létezésével. Stricker [43] később bebizonyította hogy az említett szeparabilitási feltételek elhagyhatók. Az eredmény általános alakja Kreps–Yan-féle szeparációs tétel néven ismert, és a szemimartingálokra vonatkozó elméletben is kulcsfontosságú.

1. Tétel (Kreps–Yan). *Legyen $G \subseteq L^p$ egy $\sigma(L^p, L^q)$-zárt konvex kúp ami tartalmazza L^p_--t, és tegyük fel, hogy $G \cap L^p_+ = \{0\}$. Ekkor létezik egy az $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ téren értelmezett ϕ szigorúan monoton lineáris funkcionál, és egy $g \in L^q$, melyre teljesül hogy minden $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ elemre $\phi(f) = \int_\Omega f g d\mathbf{P}$ és minden $f \in G$ esetén $\phi(f) \leq 0$.*

Mivel ϕ szigorúan monoton, ezért minden $f \in L^p_+$ esetén $\phi(f) \geq 0$, ugyanakkor minden G-beli elemre $\phi(f) \leq 0$ valamint $0 \in G \cap L^p$, ezért az $\{f \in L^p \mid \phi(f) = 0\}$ hipersík mind a G, mind az L^p_+ konvex halmaznak támaszhipersíkja, amely szeparálja a G és L^p_+ halmazokat.

Az értekezés szempontjából a legfontosabb a $p = \infty$ eset. Ekkor azonban a Kreps–Yan-tétel közgazdaságtanilag nehezen interpretálható, ugyanis, mivel $p = \infty$ esetén az $(L^p, \sigma(L^p, L^q))$-tér nem metrizálható, ezért ekkor a $\sigma(L^p, L^q)$-zártság csak általánosított sorozatokkal karakterizálható. A problémát itt is az okozza, hogy bár $\infty > p > 1$ esetén az L^p térnek az L^q a duálisa, az L^∞ térnek az L^1 tér nem duálisa. Ennek megvilágítása céljából gondoljuk meg a következőket. A Hahn–Banach-tétel egyik következménye szerint a konvex halmazoknak minden dualitással kompatibilis topológia szerint ugyanaz a lezártja, vagyis $\infty > p > 1$ esetén a G konvex kúp pontosan akkor $\sigma(L^p, L^q)$-zárt, ha L^p-ben zárt. Ezekben az esetekben tehát a gyenge topológiák alkalmazását elkerülhetjük, ld pl. Harison–Kreps [26], Duffie [16], és Dallang–Morton–Willinger [10]. A $p = \infty$ eset, és így a fenti gyenge topológia alkalmazása azonban számos gyakorlati alkalmazásban nem kerülhető el.

Mint már említettük M. Harrison, D. M. Kreps és S. R. Pliska bebizonyították, hogy a martingálmérték igen általános körülmények mellett létezik, és a fent elmondottak nagy része ún. diffúziós folyamatokra is alkalmazható (ld. [26], [36] és [25]). Az említett szerzők legfontosabb hozzájárulása azonban az volt, hogy felismerték a martingál technika jelentőségét, ezáltal nagy mértékben járultak hozzá, hogy a Black–Scholes képlet nyomán öntudatára ébredt opcióelmélet a martingálelmélet igen gyümölcsöző alkalmazási területévé váljon. Harrison és Kreps rámutatnak, hogy az akkor már meglehetősen túlérett tudományterültnek számító martingálelmélet egészen megdöbbentő módon illeszkedik a derivatív eszközök árazásának problémáihoz. A két tudományterület közti kapcsolódási pontok közül a legfontosabbakat a Girsanov-transzformációval és a martingálreprezentációval kapcsolatos eredmények szolgáltatják. A második fejezet utolsó alpontjában a lognormális modellen keresztül megmutatjuk, hogy a Girsanov-transzformáció segítségével az ekvivalens martingálmérték igen egyszerűen meghatározható.

A szemimartingál fogalmának, és így a sztochasztikus folyamatok – Markov-folyamatoktól független – általános elméletének pénzügyi jelentőségére először Harison és Pliska [25] mutatott rá. Köztudott, hogy Doob nyomán a martingálelmélet – bár nem játszott fontos szerepet – már az ötvenes években elvált a Markov-folyamatok elméletétől, a sztochasztikus integrál elmélete azonban, egészen Meyer és C. Doléans–Dade mérföldkőnek nevezhető [15] cikkének megjelenéséig nem vált attól teljesen függetlenné. Ez utóbbi eredmény, az elmélet robbanásszerű fejlődéséhez vezetett a hetvenes és nyolcvanas években, így kulcsfontosságúnak bizonyult a sztochasztikus analízis pénzügyi matematikai alkalmazhatósága szempontjából, és matematikatörténeti oldalról tekintve ez vezetett el – az itt bemutatott elmélet közvetlen előzményeinek tekinthető – Harrison–Kreps [26], és Harrison–Pliska [25] nevezetes eredményeihez. A Markov-folyamatoktól független általános elmélet később nagyrészt Dellacherie és Meyer [14] monográfiájában vált kidolgozottá.

A harmadik fejezetben az arbitrázsmentesség fogalmát kiterjesztjük több periódusos modellekre és kimondjuk az alaptétel diszkrét, véges időhorizontra vonatkozó alakját. Ez a fejezet tárgyalja az önfinanszírozó portfólió fogalmát és az ehhez szorosan kapcsolódó ármérce invariancia tételt, vagyis hogy egy önfinanszírozó kereskedési stratégia a diszkontálás elvégzése után is önfinanszírozó marad. A legtöbb alkalmazásban a diszkontálást valamilyen kockázatmentes kamatláb, pl. a bankszámlapénz kamata szerint végzik el. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a bankszámla pénzt tekintjük *ármércének*[2]. Szeretnénk azonban hangsúlyozni, hogy a diszkontálást tetszőleges portfolió vagy nem kereskedett értékpapír hozama szerint is el lehet végezni. Az ármérce invarianciának ez az általános megfogalmazása és bizonyítása tudomásunk szerint Duffie [17] nevéhez köthető, aki az állítást Itô-folyamatokra bizonyítja. Folytonos szemimartingálokra N. El Karoui, H. Geman és J. C. Rochet [18] bizonyítják, a tétel nem feltétlenül folytonos szemimartingál modellekre vonatkozó alakja megtalálható Shiryaev [42]-ban arra az esetre amikor az ármérce folyamat korlátos változású és előrejelezhető. Az értekezés 3. fejezete az ármérce invarianciát F. Jamshidian [28] cikke alapján általános szemimartingál ármérce esetére tárgyalja.

Ezt követően a negyedik fejezetben teljes bizonyítását közöljük ([11] alapján) a Delbaen és Schachermayer nevéhez fűződő alaptételnek. A disszertáció ezen fejezete a legkidolgozottabb és ebben találhatóak a szerző saját eredményei, melyek technikai jellegűek (ld. pl. 5. tétel és az azt követő megjegyzés). Bár valóban újnak mondható bizonyítást nem sikerült adnunk a tételre, ennek ellenére az eredeti bizonyítást számos ponton egyszerűsítettük és

[2] Az ekvivalens martingálmérték természetesen tetszőleges pozitív szemimartingál ármérce esetén létezik, de az függ a választott ármérce folyamattól, sőt, Conze és Viswanathan [7] bebizonyítják hogy tetszőleges $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték esetén létezik egy kereskedési stratégia, hogy a hozzá tartozó értékfolyamat szerint diszkontált árfolyamat a $\mathbf{Q}$ mérték szerint martingál. Sztochasztikus kamatlábmodelleknél az ármérce portfolió, ezáltal az ekvivalens martingálmérték megválasztása, már nem egyértelmű, ilyenkor az ármérce megválasztása függhet a konkrét beárazandó követeléstől. Ezen az elven alapul az eszközárazás ún. *ármérce-csere módszere* (ld.: [2]).

összességében érthetőbbé tettük.

Az alaptétel folytonos időhorizontra való igazolása miként látni fogjuk, igen hosszadalmas és igen „technikás". A bizonyítás a funkcionálanalízis valamint a sztochasztikus folyamatok – P. A. Meyer és a strassbourgi-iskola matematikusai által a 60-as évek végétől kezdve kidolgozott – általános elméletének mély eredményeit használja.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a befektetők meghatározott időközönként – folytonos kereskedés esetén akár minden időpillanatban – átrendezhetik a portfóliójukat. Az ily módon létrejövő ún. *kereskedési stratégiáknak* egy fontos osztályát alkotják az *önfinanszírozó* kereskedési stratégiák. Önfinanszírozó stratégiáról akkor beszélünk, ha feltételezzük, hogy a kereskedés kezdő időpontjában, vagyis a 0-dik időpontban megvásárolt portfólióból sem nem vonunk ki, sem nem adunk hozzá pótlólagos tőkét. Ennek a definíciónak a folytonos kereskedés esetére való alkalmazása nem triviális, ez az egyik fő témája az értekezés 3. fejezetének.

Természetesen a jövőbeli kifizetések jelenbeli árának meghatározásához diszkontálást kell végeznünk. A továbbiakban szeretnénk feltételezni, hogy a diszkontálást már elvégeztük, vagyis hogy a pénzpiacot leíró sztochasztikus folyamat már maga a diszkontált árfolyamat, amit az egyszerűség kedvéért S-el fogunk jelölni. A továbbiakban S legyen egy rögzített szemimartingál. Definiáljuk a K_0 konvex kúpot a következőképpen:

$$K_0 \doteq \{(H \bullet S)_\infty : \text{A } H \text{ megengedett folyamat}\},$$

ahol $H \bullet S$ a H sztochasztikus folyamat S folyamat szerinti sztochasztikus integrálját jelöli.

A véges időhorizonton való arbitrázs elméletből ismert, hogy a lehetséges származtatott termékek halmazáról fel kell tenni, hogy az teljesíti a díjtalan lomtalanítás megkötését. Ez így van a folytonos időparaméter esetében is, vagyis ha egy f kifizetés egy stratégia segítségével előállítható, akkor azt a kifizetést is megvalósíthatónak tekintjük, amely minden kimenetel esetén f-nél kevesebbet fizet. Ezt figyelembe véve jelöljük tehát C_0-al a K_0-beli elemekkel dominálható függvények kúpját, azaz legyen $C_0 \doteq K_0 - L^0_+$. Folytonos időparaméter esetén az ekvivalens mértéket megadó Radon–Nikodym deriváltról, már a legegyszerűbb esetben is csak annyi tudható, hogy eleme az L^1 térnek. Ez a folytonos és a véges számosságú időparaméter közötti eltérés egyik fontos eleme. Mivel az ekvivalens mértékcserét biztosító Radon–Nikodym deriváltat szeparációval akarjuk meghatározni, és a szeparáló hipersík normálisát az L^1 térben keressük, ezért a „primál teret", vagyis a „lehetséges" származtatott termékek halmazát le kell szűkíteni az L^∞ térre, vagyis legyen $C \doteq C_0 \cap L^\infty$.

Vegyük észre, hogy a folytonos kereskedés megengedése kibővíti a replikálható követelések körét. Ahogy már korábban utaltunk rá, ebben az általános esetben a szeparációhoz biztosítanunk kell az elválasztandó halmazok zártságát, ezért az arbitrázsmentesség korábbi algebrai fogalmát egy – a nincs ingyenebédhez hasonló – erősebb, topológiai fogalommal kell helyettesítenünk, ami kikényszeríti a szeparációhoz szükséges zártságot. Ezúttal azonban a gyenge topológia helyett az L^∞ norma által meghatározott topológiát fogjuk használni. Jelöljük tehát $\overline{C}$-sal a C kúp L^∞ normája szerinti lezártját. Ezekkel a jelölésekkel definiáljuk a Delbaen–Schachermayer-féle „arbitrázsmentesség" fogalmat. Azt mondjuk, hogy az S szemimartingál eleget tesz a NFLVR feltételnek[3], ha $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$.[4]

A NFLVR feltétel egy érdekes és fontos következménye a következő.

[3] A „no free lunch with vanishing risk" kifejezés rövidítése.

[4] Ha a definícióban az L^∞ normája szerinti lezárt helyett a $\sigma(L^\infty, L^1)$ topológia szerinti lezártat vesszük, akkor a krepsi „nincs ingyenebéd" fogalomhoz jutunk.

2. Lemma. *Egy S szemimartingál pontosan akkor elégíti ki a $NFLVR$ feltételét, ha minden K_0-beli (g_k) sorozatra a*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\left\|g_k^-\right\|_\infty = 0$$

feltételből következik, hogy

$$g_k \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Ennek a lemmának a bizonyítását az értekezésben sikerült lényegesen leegyszerüsíteni. A fejezet, és talán az egész értekezés fő állítása a következő:

3. Tétel (Pénzügyi eszközök árazásának alaptétele). *Legyen S egy lokálisan korlátos valós értékű, valamely $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerinti szemimartingál. Pontosan akkor létezik a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amelyre nézve az S lokális martingál, ha az S eleget tesz a NFLVR feltételnek.*[5]

Az egyik irány bizonyítása majdnemhogy triviális, a nehézség a martingálmérték létezésének igazolásban rejlik. A technikai problémákat a következő állításban foglaljuk össze:

4. Tétel. *Az alaptétel feltételeinek teljesülése esetén a C kúp $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt része az L^∞ térnek.*

Az alábbiakban jelöljük B_∞-nel az L^∞ tér zárt egységgömbjét. Az előző tétel bizonyításának egyik kulcslépése a Krein–Šmulian-tétel alábbi nemtriviális következményének bizonyítása.

5. Tétel. *Az $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tér C konvex kúpja pontosan akkor $\sigma(L^\infty, L^1)$-zárt, ha a $C\cap B_\infty$ metszet zárt a sztochasztikus konvergenciára nézve.*

Ezt az állítást Delbaen és Schachermayer (ld.: [11] és [13]) a Mackey–Arens-tételre valamint Grothendieck lemmájára vezetik vissza. Az értekezés egyik érdekes eredménye, hogy erre az állításra egy jóval elemibb bizonyítást mutat be, amely elkerüli a Mackey-topológiák alkalmazását[6].

Delbaen és Schachermayer [12]-ben – lényegesen eltérő megközelítést alkalmazva – bebizonyították, hogy az alaptétel kiterjeszthető a nem feltétlenül lokálisan korlátos esetre is. Ebben az esetben azonban a NFLVR az ekvivalens σ-martingál-mérték létezésével ekvivalens.

A martingálmérték fogalma nem csak a derivatív eszközök árazásában, de a nemteljes piacokon való portfolió optimalizálásban is fontos szerepet játszik. Ismert, hogy a nem Markov-típusú diffúziós folyamatok esetén a portfolió optimalizálás dinamikus programozási módszerei nem működnek, ezért a 80-as évek közepétől, többek között Pliska [38], Karatzas et al. [34] valamint Cox és Huang [8] kidolgozták a portfolió optimalizálás ún. dualitási módszerét. A módszer lényege röviden a következőképpen írható le. A dinamikus portfolió választási problémát két részre bontjuk. Első lépésben a dinamikus optimalizálási problémát átalakítjuk egy statikus variációs problémává, ami egy martingálmértékekből álló halmazon való minimalizálást jelent. Ez utóbbit dualitási technikák segítségével megoldva megkapjuk az utolsó periódusbeli optimális vagyont, majd ebből a martingál reprezentációs tétel segítségével meghatározzuk a kereskedési stratégiát. Ezen dualitási technikákat vizsgálja F. Bellini és M. Frittelli [3] cikke, melyben a szerzők

[5] Az állítás könnyen kiterjeszthető lokálisan korlátos folymatokra is.

[6] Ld: Badics T. – Medvegyev P.: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén, Szigma, 2009/3–4.

egy általános dualitási tételt bizonyítanak. Az ötödik fejezetben először ismertetjük a pénzügyi eszközök árazásának duális megközelítését, majd a hatodik fejezetben Bellini és Frittelli eredményéből kiindulva [21], [23] és [35] alapján teljes bizonyítását közöljük az alaptétel Frittelli féle alakjának, a hetedik fejezetben pedig, miután áttekintettük az Orlicz-terekre vonatkozó szükséges előismereteket, [21], [22] és [35] alapján megmutatjuk hogy a legfontosabb arbitrázs fogalmak a befektetők preferenciái segítségével is karakterizálhatóak. Ennek a fejezetnek egyik fontos üzenete az a felismerés, hogy Frittelli és Klein fent említett eredményei közgazdasági szempontból új megvilágításba helyezik a Delbaen–Schachermayer-féle elméletet. Ezen fejezetek tartalmának megvilágításához ki kell térnünk a arbitrázsmentességnek és a befektetők preferenciára vonatkozó megkötéseknek a viszonyára.

Azt szokás mondani, hogy az arbitrázsmentesség feltevése implicit módon annyit feltételez a befektetők preferenciáiról, hogy azok preferenciarendezése monoton, hiszen egy arbitrázslehetőség minden monoton preferenciákkal rendelkező befektető számára kívánatos. Azt is láttuk, hogy az életképesség ekvivalens a nincs ingyenebéd feltétellel, amit úgy is interpretálhatnánk, hogy a nincs ingyenebéd feltétel a preferenciák konvexitását feltételezi. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e egy egységes fogalmi keret, aminek segítségével az arbitrázsfogalmak közötti eltérések a preferenciák eltérő voltára vezethetőek vissza. Kézenfekvő megoldásnak tűnhet a sztochasztikus dominancia mint fogalmi keret használata. A sztochasztikus dominancia és az arbitrázs kapcsolatát vizsgálja R. Jarrow [29]. Megmutatja, hogy egy teljes piacon pontosan akkor létezik arbitrázs, ha létezik két speciális tulajdonsággal rendelkező eszköz, melyek közül az egyik egy bizonyos értelemben sztochasztikusan dominálja a másikat.

A sztochasztikus dominancia alapgondolatát fejleszti tovább Frittelli „no market free lunch" fogalma. A „no market free lunch" fogalom az arbitrázsfogalmak lezárás operátorait meghatározó topológiafogalmaknak a lehetséges befektetők hasznosságfüggvényeinek analitikus tulajdonságait felelteti meg. A befektető preferenciarendezését alapul véve azt mondhatjuk, hogy az arbitrázslehetőség azt jelenti, hogy nulla kiinduló vagyonnal, kereskedés révén egy olyan véletlen f kifizetéshez juthatunk, mely felbontható egy w nemnegatív és egyúttal pozitív valószínűséggel pozitív értéket felvevő kifizetés és egy olyan q véletlen kifizetés összegére, amelynek a hasznossága – bármely monoton hasznosságfügvényt alapul véve – legalább akkora mint az azonosan nulla kifizetésé. Ezt a gondolatmenetet általánosítja Frittelli „no market free lunch" (a továbbiakban $NMFL$) fogalma. Viszonylag egyszerű eszközöket felhasználva megmutatható, hogy lokálisan korlátos esetben a $NMFL$ ekvivalens az ekvivalens martingálmérték létezésével. Erre az állításra a továbbiakban Frittelli-féle alkaptételként fogunk hivatkozni.

Ahogy azt korábban láttuk, az arbitrázsmentesség feltétele általános esetben nem garantálja az ekvivalens martingálmérték létezését, ezért egy erősebb feltételre volt szükségünk, ehhez viszont bővítenünk kellett a kizárandó arbitrázs lehetőségek halmazát. A fenti megközelítést figyelembe véve, ez megtehető oly módon, hogy a fenti f véletlen kifizetések esetében csak bizonyos monoton hasznossági függvényekre követeljük meg a fenti tulajdonságot. Ezen a ponton válik el a Delbaen–Schachermayer-féle és a Fritteli-féle megközelítés. Az előbbi ugyanis a befektetők hasznossági függvényétől csupán a folytonosságot követeli meg, míg az utóbbi a konkavitást is.

A $NMFL$ fogalom egy igen érdekes alkalmazását adja I. Klein [35], megmutatva, hogy megfelelő hasznosságfüggvény használatával a nincs ingyenebéd (NFL) fogalom egyfajta $NMFL$-ként is definiálható. A NFL fogalmának ezen karakterizációja alapján megállapítható, hogy a Frittelli alaptétel tulajdonképpen a Kreps–Yan-tételhez hasonló mélységű állítás, és a két állítás ekvivalenciája Orlicz-tér módszerekkel egyszerűen bizonyítható.

Mivel mind a Delbaen–Schachermayer-tétel, mind a Frittelli alaptétel az ekvivalens lokális martingálmérték létezésének az ekvivalenciájáról szól, ezért a két arbitrázsmentességi fogalom ekvivalens. Ezért ha feltételezzük, hogy valamely pénzügyi piacon az árrendszer konkáv hasznossági függvénnyel rendelkező befektetőket feltételezve konzisztens (vagyis teljesül a konkáv hasznossági függvényt feltételező $NMFL$), akkor ez a piac a nem feltétlenül konkáv de folytonos hasznosságfüggvényű befektetők számára már nem tartogat új arbitrázs lehetőségeket. A Delbaen-Schachermayer-féle elmélet egy érdekes mondanivalója tehát az, hogy ebben az esetben a piac konzisztenciájának vizsgálatakor a befektetők hasznosságfüggvényére vonatkozó konkavitási megkötés nem jelent megszorítást. Vegyük észre a párhuzamot a mikroökonómia dualitási elméletének egy ismert következményével. A termeléselmélet dualitáselve szerint a költséggörbéből a technológia minden közgazdaságtanilag fontos tulajdonsága kiolvasható, ugyanakkor a költség függvényhez mindig található egy konvex inputkövetelmény halmaz, amiből az származtatható. Ezek szerint a technológia konvexitása nem túlságosan megszorító feltételezés. Míg azonban ez utóbbi klasszikus közgazdaságtani állításnak a bizonyítása csak egyszerű konvex analízisbeli eszközöket használ, az általunk megfogalmazott igen érdekes közgazdasági tartalmú állításnak a bizonyítása – mivel a C-kúp speciális szerkezetén alapul – úgy tűnik, a sztochasztikus folyamatok általános elméletének, vagyis a Delbaen–Schachermayer-elmélet felhasználása nélkül nem lehetséges.

Végül a nyolcadik fejezetben részletesen tárgyaljuk az *egy ár törvényének* fogalmát, annak az állapotár deflátor segítségével történő matematikai karakterizációját, valamint az egy ár törvényének és az arbitrázsmentesség fogalmának viszonyát.

3. További kutatási lehetőségek

Mint már korábban említettük, értekezés témájával szoros kapcsolatban van a pénzügyi eszközök árazásának második alaptétele, vagyis a teljesség problémája, melynek kiterjedt irodalma létezik (ld. pl. [11], [5] és [6]). Ennek tanulmányozása egy lehetséges jövőbeli kutatási feladat.

A szemimartingáloknak egy az alkalmazások szempontjából igenfontos osztályát alkotják az ún. Lévy-folyamatok. Mint azt az előszóban már említettük, az eszközárazás elmélete a Wiener-folyamatokon alapuló modellekre meglehetősen kidolgozott, és a témával mára már számos tankönyv foglalkozik, ugyanakkor mindezidáig kevésbé feldolgozott terület a pénzpiacok Lévy-folyamatokon alapuló megközelítése. Empírikus kutatások alátámasztják, hogy a Lévy-folyamatok a pénzpiacoknak egy jóval valósághűbb leírását adják mint a Wiener-folyamaton alapuló megközelítés, ezért gyakorlati szempontból igen nagy jelentőségű ezen modellek vizsgálata.

Tárgyalásunkban mindvégig feltételeztük, hogy piacok súrlódásmentesek, vagyis a kereskedésnek nincsenek tranzakciós költségei. Az utóbbi évtized kutatásainak egy igen fontos eredménye, hogy bizonyos modellek esetén ezen feltétel feloldható, és az alaptétel kiterjeszthető a súrlódásos modellek bizonyos osztályaira (diszkrét modellekre ld.: [32] és [41], folytonos folyamatokra ld.: [24]). Egy további lehetséges jövőbeni kutatási feladat ezen súrlódásos modellek vizsgálata, és a meglévő eredmények szemimartingál modellekre való kiterjesztése.

Végül, de nem utolsó sorban egy igen érdekes és sokatígérő kapcsolódó kutatási terület a pénzpiacok gauge-elméleti megközelítése, ami azon alapul, hogy az arbitrázsmentességnek létezik egy differenciálgeometriai eszközöket használó karakterizációja. Ezen megközelítés, bár nem új (ld.: [27]), igen kevéssé kutatott, aminek oka többek között a megközelítés újszerűségében, és a közgazdaságtanban még szokatlan matematikai apparátusban keresendő. A gauge-elméletet a kvantummechanikában és a kozmológiában már a nyolcvanas évek óta használják. A terület felhasználja a differenciálgeometriának, az algebrai topológia homotópia-elméletének, és az absztrakt algebra, ezen belül a Lie-csoportok és Lie-algebrák elméletének egyes fejezeteit. Ennek az elméletnek a tanulmányozása nem csak az eszközárazás szempontjából lenne érdekes, de a közgazdaságtan más területein való alkalmazhatósága szempontjából is. Annak ellenére, hogy számos kutató a közgazdaságtan megújulását várja a gauge-elmélettől, jelenleg a közgazdaságtanban tudomásunk szerint csak az arbitrázselméletben (ld.: [27], [44], [20] és[19]) és az indexszámítás preferenciákon alapuló megközelítésében (ld.: [37]) használják, ezért ez a téma egy igen ígéretes kutatási területnek tekinthető.

4. A szerzőnek az értekezés témájához kapcsolódó publikációi

1. Szemimartingálok elmélete és a pénzügyi eszközök árazásának alaptétele, I. Országos Gazdaság és Pénzügyi Matematikai PhD Konferencia kiadványa, 2008, Budapest
2. On the General Mathematical Theory of Asset Pricing: Duality in Finance and the Fundamental Theorem of Asset Pricing, (coauthor: Medvegyev Péter), 16th International Conference on Mathematical Methods in Economy and Industry, 2009, (Joint Czech-German-Slovak Conference, Ceské Budejovice)
3. A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén, Szigma, 2009/ 3–4. szám, (társszerző: Medvegyev Péter)
4. Topológikus vektorterek az arbitrázselméletben, Szemináriumi előadás, Pannon Egyetem Matematika Tanszékének és a VEAB Matematikai és Fizikai Szakbizottsága Matematikai Analízis és Alkalmazási Munkabizottságának szervezésében, 2010

Hivatkozások

[1] Badics T. – Medvegyev P.: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén, Szigma, 2009/3–4.

[2] Bajeux-Besnainou, I. – Portrait, R.: The Numeraire Porfolio: A New Perspective on Financial Theory, The European Journal of Finance, 3 (1997), 291–309.

[3] Bellini, F. – Frittelli, M.: On the Existence of Minimax Martingale Measures, Math. Finance, 12/1 (2002), 1–21.

[4] Bewley, T.: Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities, *Journal of Economic Theory*, 4 (1972), 514–540.

[5] Cherny, A.S.: Vector Stochastic Integral in the First Fundamental Theorem of Asset Pricing, Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, INRIA, (1998), 149–163.

[6] Cherny, A.S. - Shiryaev, A. N.: Vector Stochastic Integral and the First Fundamental Theorem of Asset Pricing, Proceedings of Steklov Mathematical Institute Seminar, 237 (2002), 12–56.

[7] Conze, A. – Vishwanathan, R.: Probability Measues and Numeraire, CEREMADE, Université de Paris, 1991

[8] Cox, J. C. - Huang, C. F.: Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow Diffusion Processes, J. Econ. Th. 49 (1989), 33–83.

[9] Cox, J. C. –Ross, S. – Rubinstein, M.: Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 3 (1979), 145-166.

[10] Dalang, R. C. – Morton, A. – Willinger, W.: Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market model. Stochastics Stochastics Rep., 29 (1990), 185–201.

[11] Delbaen, F. – Schachermayer, W.: A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, Math. Ann., 300 (1994), 463–520.

[12] Delbaen, F.– Schachermayer, W.: The Fundamental Theorem of Asset Pricing, for Unbounded Stochastic Processes, Math. Ann., 312 (1998), 215–260.

[13] Delbaen, F.– Schachermayer, W.: The Mathematics of Arbitrage, Springer-Verlag, Berlin, 2006

[14] Dellacherie, C. - Meyer, P. A.: Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, vol I, Vol II, 1976, 1980

[15] Doléans-Dade C. - Meyer, P.A.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Séminaire de Probabiliés IV, Lecture Notes in Mathematics, 124 (1970), 77–107.

[16] Duffie, D.– Huang, C–f.: Multiperiod Security Markets With Differential Information, Journal of Mathematical Economics, 15 (1986), 283–303.

[17] Duffie, D.: Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, 1992

[18] El Karoui, N. – Geman, H. – Rochet, J. C.: Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing, Journal of Applied Probability 32 (1995), 443–458.

[19] Farinelli, S.: Geometric Arbitrage and Market Dynamics, preprint, elérhető: www.ssrn.com, 2009

[20] Farinelli, S.–Vazquez, S.: Gauge invariance, Geometry and Arbitrage, preprint, elérhető: www.ssrn.com, 2009

[21] Frittelli, M.: Some Remarks on Arbitrage and Preferences in Securities Market Models, Math. Finance, 14/3 (2004), 351–357.

[22] Frittelli, M.: No arbitrage and Preferences, Instituto Lombardo – Accademia di Scienze e Lettere, (2007), 179–199.

[23] Frittelli, M. – Lakner, P.: Almost Sure Characterisation of Martingals, Stochastics and Stochastics Report, 49 (1994)

[24] Guasoni, P.–Rásonyi, M.–Schachermayer, W.: The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Continuous Processes under Small Transaction Costs, online: Anals of Finance, 2008

[25] Harrison, J. M. – Pliska, S. R.: Martingales and Stochastic integrals in the Theory of Continous Trading. Stochastic Process. Appl., 11 (1981), 215–260.

[26] Harrison, J. M. – Kreps, D. M.: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market. J. Econom. Theory, 20 (1979), 381–408.

[27] Ilinski, K.: Physics of Finance, Wiley, New York, 2001.

[28] Jamshidian, F: Numeraire Invariance and Application to Option Pricing and Hedging, MPRA Paper, No. 7167, February 2008

[29] Jarrow, R.: The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance, The Journal of Finance, vol. XLI, no. 4, (1986), 915-921.

[30] Jones, L. E.: Special Problems Arising in the Study of Economies with Infinitely Commodities, In:Models of Economic Dynamics, ed.: Hugo, F., Springer-Verlag, Sonnenscheim, Berlin, 1986

[31] Kabanov, Yu. M.: On the FTAP of Kreps–Delbaen–Schachermayer, Statistics and Control of Random Processes, The Liptser Festschrift, Proceedings of Steklov Mathematical Institute Seminar, (1997), 191–203.

[32] Kabanov, Yu. M.–Rásonyi, M.–Stricker, C.: No-arbitrage Criteria for Financial Markets with Efficient Frictions, Finance Stoch., Vol. 6 (2002), pp. 371–382.

[33] Kabanov, Yu. M. – Stricker, C.: A Teachers' Note on No-arbitrage Criteria, Séminaire de probabilités (Strasbourg), 35 (1997), 149–152.

[34] Karatzas I. – Lehoczki, J. – Shreve, S. – Xu, G.:Martingale and Duality Methods For Utility Maximization in an Incomplete Market, SIAM J. Control Optim., 29 (1991), 702–730.

[35] Klein, I: A comment on market free lunch and free lunch, Math. Finance 16 (2006), 583–588

[36] Kreps, D. M.: Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities, J. Math. Econom., 8 (1981), 15–35.

[37] Malaney, P. N.: The Index Number Problem: A Differential Geometric Approach, PhD Thesis, Harvard University Economics Department, 1996

[38] Pliska, S. R.: A stochastic calculus model of continuos trading: optimal portfolios, Math. Oper. Res., 11, (1986), 371–382.

[39] Prescott, E. C. – Lucas, R. E.: Price systems in Infinite Dimensional Space, International Economic Review, 13 (1972), 416–422.

[40] Schachermayer, W.: A Hilbert Space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Time, *Insurance Math. Econ.* 11 (1992), 249–257.

[41] Schachermayer, W.: The Fundamental Theorem of Asset Pricing Under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time, Math. Finance, Vol. 14 (2004), pp. 19–48.

[42] A. N. Shiryaev: Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory, World Scientific, Singapore, 2001

[43] Stricker, C.: Arbitrage et Lois de Martingale, Annales de l'Institut Henry Poincaré – Probabilités et Statistiques, vol. 26 (1990), 451–460.

[44] Young, K.: Foreign Exchange Market as a Latice Gauge Theory, Am. J. Phys. 67, 1999