

A módosított láncmódszer késleltetett differenciálegyenlet-rendszerekre alkalmazásokkal

Doktori (PhD) értekezés

Krasznai Beáta

Témavezető: Dr. Pituk Mihály egyetemi tanár

Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Informatikai Tudományok Doktori Iskola

2015.

A módosított láncmódszer késleltetett differenciálegyenlet-rendszerekre alkalmazásokkal

Értekezés doktori (PhD) fokozat elnyerése érdekében

Írta: Krasznai Beáta

Készült a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar Informatikai Tudományok

Doktori Iskolájának keretében

Témavezető: Dr. Pituk Mihály egyetemi tanár

Elfogadásra javaslom (igen/nem)

.....

aláírás

A jelölt a doktori szigorlaton%-ot ért el

.....

a Szigorlati Bizottság elnöke

Veszprém, 2015. hó nap

Az értekezést bírálóként elfogadásra javaslom:

Bíráló neve: (igen/nem)

.....

aláírás

Bíráló neve: (igen/nem)

.....

aláírás

A jelölt az értekezés nyilvános vitáján.....%-ot ért el.

.....

a Bíráló Bizottság elnöke

Veszprém, 2016. hó nap

A doktori oklevél minősítése

.....

az EDT elnöke

Tartalmi kivonat

Számos időben változó folyamatnál a vizsgált rendszer pillanatnyi megváltozása nem csupán a rendszer jelenlegi állapotától, hanem korábbi állapotától is függ. Ennek modellezésére késleltetett differenciálegyenleteket használnak. A késleltetés hatásának figyelembe vétele lényegesen megnehezíti a vizsgálatot, mivel a rendszer fázistere végtelen dimenziós, szemben a közönséges differenciálegyenletekkel való modellezéssel, ahol csak véges dimenziós problémákkal találkozunk. Ennek a nehézségnek a leküzdésére Repin javasolt egy eljárást, az ún. láncmódszert, amelynek során a késleltetett egyenlet megoldásait egy magasabb dimenziójú közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásaival közelítette minden véges időintervallumon. Bizonyos kompartmentrendszerek tulajdonságait figyelembe véve Győri a láncmódszernek egy újszerű módosítását kezdeményezte. A módosítás azért jelentős, mert a Győri-féle approximáció nem csupán véges intervallumokon, hanem bizonyos feltételek mellett a teljes félegyenesen egyenletesen konvergál a késleltetett egyenlet megoldásához.

Az értekezésben a módosított láncmódszert vizsgáltuk a korábbiaknál általánosabb késleltetett egyenletekre. Definiáltuk az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert, bizonyítottuk annak egyenletes konvergenciáját minden véges intervallumon, és explicit elegendő feltételt adtunk arra, hogy a konvergencia egyenletes legyen a teljes félegyenesen. Elegendően sima kezdeti függvényekhez tartozó megoldásokra a konvergencia nagyságrendjére is sikerült becslést adnunk véges és végtelen intervallumokon egyaránt. Az approximációs tételek bizonyítása során új globális exponenciális stabilitási kritériumokat kaptunk, amelyek önmagukban is érdekesek. Approximációs tételeinket több modellegyenletre is alkalmaztuk.

Abstract

In many processes changing in time the speed of the change depends not only on the present state, but also depends on the previous state. This can be modelled using delay differential equations. The effect of the delay makes the analysis difficult, because the phase space of the system is infinite dimensional, contrary with ordinary differential equations, which lead only to finite dimensional problems. In order to overcome this difficulty, Repin suggested a method, the so-called chain method, where the solutions of the delay differential equations are approximated by the solutions of a higher dimensional system of ordinary differential equations. Based on some properties of compartmental systems, Györi initiated a new modification of the chain method. This modification is significant because Györi's approximation converges not only on finite intervals, but under certain conditions it converges to the solution of the delay equation on the whole half-line.

In the thesis, we have studied the modified chain method for more general delay differential equations than previously. We have defined the approximating system of ordinary differential equations, we have shown its uniform convergence on each finite time interval and we have given explicit sufficient conditions under which the convergence is uniform on the whole half-line. For solutions corresponding to sufficiently smooth initial functions, we have given an estimate for the order of the convergence on both finite and infinite intervals. During the proof of the approximation theorems, we have obtained new global exponential stability criteria which are interesting in their own rights. The approximation theorems have been applied to several model equations.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Pítuk Mihály professzor úrnak folyamatos útmutatásáért, munkám elvégzéséhez nyújtott segítségéért.

Köszönettel tartozom Dr. Győri István professzor úrnak kutatási munkám megalapozásában nyújtott segítségéért.

Köszönöm Dr. Hartung Ferenc professzor úrnak hasznos tanácsait és javaslatait.

Kutatómunkám végzése során sok segítséget kaptam kollégáimtól. Köszönöm valamennyi jelenlegi és korábbi munkatársamnak, hogy segítettek munkámat.

Végül szeretném megköszönni családom, gyermekeim türelmét és kitartó, szerető támogatásukat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	7
1.1. A láncmódszer	7
1.2. A módosított láncmódszer	9
1.3. Az értekezés célja és felépítése	12
2. Approximáció sima kezdeti függvények esetén	14
2.1. Jelölések	14
2.2. A késleltetett differenciálegyenlet és az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer	15
2.3. Approximációs tételek	18
2.4. Előzetes eredmények	19
2.5. Az approximációs tételek bizonyítása	25
3. Approximáció folytonos kezdeti függvények esetén	32
3.1. Approximációs tételek	32
3.2. A késleltetett egyenlet megoldásainak egymástól való távolsága	32
3.3. Az approximáló közönséges egyenletrendszer megoldásainak egymástól való távolsága	38
3.4. Az approximációs tételek bizonyítása	42
3.5. Egyensúlyi helyzetek, stabilitás	45
4. Alkalmazások	48
4.1. A propofol megoszlás farmakokinetikai modellje	48
4.2. Védett tengeri területek halpopulációjának modellje	56
4.3. Késleltetett neurális hálózatok modellegyenlete	62
4.4. További illusztratív példák	69
A. Függelék	80
B. Függelék	85
Összegzés	87

1. Bevezetés

1.1. A láncmódszer

Számos biológiai, fizikai, kémiai, műszaki és közgazdaságtani folyamatnál a rendszer pillanatnyi megváltozása annak korábbi állapotától is függ. Ezeknek a folyamatoknak a modellezésére késleltetett differenciálegyenleteket használnak. A késleltetett differenciálegyenletek elméletére vonatkozó alapvető eredmények Driver [15], Hale [31], Hale és Lunel [32] illetve Diekmann et al. [14] monográfiáiban szerepelnek. A kutatások motivációjáról és a különböző tudományterületekről származó modellekről Erneux [16], Kolmanovskij és Myshkis [39], Gopalsamy [21], Kuang [43] és Smith [48] monográfiáiban olvashatunk részletesen. A közönséges differenciálegyenletekkel ellentétben a késleltetett argumentumú differenciálegyenletek fázistere végtelen dimenziós. Ez a tény számos nehézséget okoz a megoldások kvalitatív és kvantitatív tulajdonságainak vizsgálatában. Ennek a nehézségnek a leküzdésére Repin [49] egy approximációs eljárást javasolt, amelynek során a késleltetett egyenlet elegendően sima megoldásait egy alkalmasan választott magasabb dimenziójú közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásával approximálta. A Repin-féle eljárást, az ún. *láncmódszert* az

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

skaláris egyenleten fogjuk bemutatni, ahol $\tau > 0$ és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Az egyenlet megoldásán olyan $x : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, amely folytonos $[-\tau, \infty)$ -n, differenciálható $[0, \infty)$ -n, és itt eleget tesz az (1.1) egyenletnek. A lépések módszerével belátható, hogy ha az f függvény Lipschitz-folytonos, akkor bármely $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos kezdeti függvény esetén az (1.1) egyenletnek egyetlen olyan megoldása van, amelyre teljesül az

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (1.2)$$

kezdeti feltételt. Legyen $n \geq 1$ egész és vezessük be az

$$x_j^{[n]}(t) = x\left(t - j\frac{\tau}{n}\right), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (1.3)$$

jelölést. Ha x folytonosan differenciálható a $[-\tau, \infty)$ intervallumon, akkor a Taylor-formulából kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ és $1 \leq j \leq n$ esetén

$$x' \left(t - j \frac{\tau}{n} \right) = \frac{n}{\tau} x \left(t - j \frac{\tau}{n} \right) - \frac{n}{\tau} x \left(t - (j-1) \frac{\tau}{n} \right) + \mu_j^{[n]}(t), \quad (1.4)$$

ahol a $\mu_j^{[n]}$ hibatag "kicsi". Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az $x^{[n]} = \left(x_0^{[n]}, x_1^{[n]}, \dots, x_n^{[n]} \right)^T$ vektorfüggvény, ahol T a transzponálásra utal, megoldása az

$$\begin{aligned} x'_0 &= f(x_0, x_n), \\ x'_j &= -\frac{n}{\tau} x_j + \frac{n}{\tau} x_{j-1} + \mu_j^{[n]}(t), \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszernek, és ezen megoldás kezdeti értékei

$$x_j(0) = \phi \left(-j \frac{\tau}{n} \right), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (1.6)$$

Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert az (1.5) egyenletrendszerből a $\mu_j^{[n]}$ hibatagok elhagyásával kapjuk, azaz az (1.1) – (1.2) kezdetiérték-feladat megoldását az

$$\begin{aligned} y'_0 &= f(y_0, y_n), \\ y'_j &= -\frac{n}{\tau} y_j + \frac{n}{\tau} y_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$y_j(0) = \phi \left(-j \frac{\tau}{n} \right), \quad 0 \leq j \leq n \quad (1.8)$$

kezdeti feltételt teljesítő megoldásának y_0 komponensével közelítjük.

Legyen x az (1.1) – (1.2) illetve $y^{[n]} = \left(y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]} \right)^T$ az (1.7) – (1.8) kezdetiérték-feladat megoldása. Repin [49] megmutatta, hogy ha a ϕ kezdeti függvény elegendően sima, akkor $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen minden véges $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon. A láncmódszerrel kapcsolatos további eredményeket Banks [2], Banks

és Kappel [3] és Janushevski [34] munkáiban találhatunk. Amint azt Gedeon és Hines [18, 19], Demidenko [13] és Koch [37] kutatásai bizonyítják, a láncmódszer vizsgálata továbbra is aktuális.

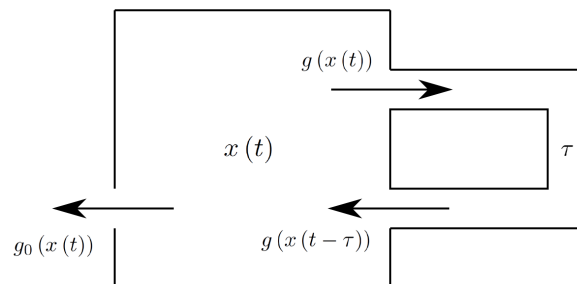
1.2. A módosított láncmódszer

Bizonyos kompartment rendszerek tulajdonságait alapul véve, Győri [24, 25] a láncmódszernek egy fontos módosítását kezdeményezte. A kompartment-rendszerek alkalmasak idegen anyag kinetikájának vizsgálatára, pl. szervek, szövetek közötti gyógyszerek mozgásának, átalakulásának kinetikai leírására. Éppen ezért népszerűek pl. a gyógyszerkutatásban vagy anyagcsere folyamatok vizsgálatában. Megemlítjük, hogy Kanyár, Eller és Győri [35] radiokardiogramok matematikai leírására használt csöves kompartment-rendszert.

A Győri-féle megközelítést az

$$x'(t) = -[g_0(x(t)) + g(x(t))] + g(x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

egyenleten illusztráljuk, ahol $\tau > 0$ és $g_0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív folytonosan differenciálható függvények. Az (1.9) késleltetett argumentumú differenciálegyenlet egy csöves kompartmentrendszer állapotát írja le, ahol $x(t)$ a kompartmentben lévő anyag mennyisége a t időpillanatban (mértékegysége tömeg egység), $g_0(x(t))$ a kifolyó tömegáram, $g(x(t))$ a kompartmentből a csőbe jutó tömegáram, τ pedig a tranzitidőt jelöli (lásd 1. ábra).



1. ábra. Csöves kompartment-rendszer

A rendszer kezdeti állapotát egy $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos kezdeti függvénnyel definiáljuk. Az (1.9) egyenlet ekvivalens az

$$x(t) + \int_{t-\tau}^t g(x(s)) ds + \int_0^t g_0(x(s)) ds = \phi(0) + \int_{-\tau}^0 g(\phi(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (1.10)$$

integrálegyenlettel, amely az anyagmegmaradás törvényén alapuló mérlegegyenlet.

Vezessük be az

$$\begin{aligned} x_0^{[n]}(t) &= x(t), \\ x_j^{[n]}(t) &= \int_{t-j\frac{\tau}{n}}^{t-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(x(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (1.11)$$

jelöléseket, ahol $t \geq 0$ és $n \geq 1$ egész. Ebben az egyenletben az $\int_{t-j\frac{\tau}{n}}^{t-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(x(s)) ds$ integrál a $\left[t - j\frac{\tau}{n}, t - (j-1)\frac{\tau}{n} \right]$ időintervallumban a csőbe beáramló anyagmennyiséget jelenti. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $x^{[n]} = \left(x_0^{[n]}, x_1^{[n]}, \dots, x_n^{[n]} \right)^T$ vektorfüggvény megoldása az

$$\begin{aligned} x_0' &= -[g_0(x_0) + g(x_0)] + \frac{n}{\tau} x_n - \mu_n^{[n]}(t), \\ x_1' &= g(x_0) - \frac{n}{\tau} x_1 + \mu_1^{[n]}(t), \\ x_j' &= \frac{n}{\tau} x_{j-1} - \frac{n}{\tau} x_j + \mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t), \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (1.12)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszernek, ahol

$$\mu_j^{[n]}(t) = \frac{n}{\tau} \int_{t-j\frac{\tau}{n}}^{t-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(x(s)) ds - g\left(x\left(t - j\frac{\tau}{n}\right)\right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert az (1.12) egyenletrendszerből a $\mu_j^{[n]}$ hibatagok elhagyásával kapjuk, azaz az (1.9) – (1.2) kezdetiértékfeladat megoldását az

$$\begin{aligned}
y'_0 &= -[g_0(y_0) + g(y_0)] + \frac{n}{\tau}y_n, \\
y'_1 &= g(y_0) - \frac{n}{\tau}y_1, \\
y'_j &= \frac{n}{\tau}y_{j-1} - \frac{n}{\tau}y_j, \quad 2 \leq j \leq n,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$y_0(0) = \phi(0), \quad y_j(0) = \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-j\frac{\tau}{n}} g(\phi(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.14}$$

kezdeti feltételt teljesítő megoldásának y_0 komponensével fogjuk közelíteni.

A Repin-féle eljáráshoz hasonlóan a módosított láncmódszer is egyenletes approximációját adja a késleltetett egyenlet megoldásainak $[0, \infty)$ minden véges részintervallumán. A Győri-féle módosítás azért jelentős, mert bizonyos feltételek mellett garantálja a megoldások egyenletes approximációját a teljes $[0, \infty)$ intervallumon.

Legyen x az (1.9) – (1.2) illetve $y^{[n]} = (y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]})^T$ az (1.13) – (1.14) kezdetiérték-feladat megoldása. Győri és Turi [28] megmutatta, hogy ha az x megoldás kétszer folytonosan differenciálható a $[-\tau, \infty)$ intervallumon, továbbá teljesülnek az

$$\int_0^{\infty} |x'(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |x''(t)| dt < \infty$$

feltételek, akkor létezik $C > 0$ úgy, hogy minden n -re

$$\sup_{t \geq 0} |x(t) - y_0^{[n]}(t)| \leq C \frac{\tau}{n}.$$

Speciálisan, $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen a teljes $[0, \infty)$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$.

1.3. Az értekezés célja és felépítése

Az értekezésben a módosított láncmódszert fogjuk kiterjeszteni az (1.9) skaláris egyenletnél általánosabb

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(x(t - \tau))$$

differenciálegyenlet-rendszerre, ahol A egy $d \times d$ típusú valós négyzetes mátrix, $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos vektorfüggvény.

A 2. fejezetben definiáljuk az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert és bizonyítjuk a módszer konvergenciáját a késleltetett egyenlet eleendően sima kezdeti függvényekhez tartozó megoldásaira előbb véges intervallumokon, majd bizonyos kiegészítő feltételek mellett a teljes $[0, \infty)$ intervallumon. Hangsúlyozni kívánjuk, hogy eleendően sima kezdeti függvény esetén az approximáció nagyságrendjére - véges és végtelen intervallumon egyaránt - tudunk becslést adni.

A 3. fejezetben a késleltetett egyenlet tetszőleges folytonos kezdeti függvényhez tartozó megoldására is bizonyítjuk a módosított láncmódszer konvergenciáját. A bizonyításban felhasználjuk a 2. fejezetben bizonyított approximációs tételket és további új eredményeket a késleltetett egyenlet illetve az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak egymástól való távolságáról. Ezek az eredmények önmagukban is érdekesek, mivel új globális exponenciális stabilitási kritériumokat is levezethetünk belőlük. A bizonyítás alapja a monoton dinamikai rendszerek elméletéből ismert összehasonlító elv. Megjegyezzük, hogy a 2. fejezetben szereplő approximációs tételekkel ellentétben az általános esetben a konvergencia nagyságrendjére nem tudunk a becslést adni.

A 4. fejezetben konkrét késleltetett egyenletekre alkalmazzuk a módosított láncmódszert. A példák között szerepel egy farmakokinetikai modellegyenlet, egy halpopuláció modellegyenlete, egy neurális hálózatos modell két különböző aktiválási függvényvel és további egyenletek, amelyeken a numerikus approximáció pontosságát illusztráljuk. A példákban szereplő közönséges differenciálegyenlet-rendszereket a Matlab programba beépített `ode45` algoritmussal oldottuk meg.

A Függelékben a 3. fejezetben szereplő stabilitási kritériumokat kiterjesztjük a késleltetett differenciálegyenletek egy általánosabb osztályára. Az összehason-

lító elv alkalmazásával új globális exponenciális stabilitási kritériumot adunk egy neurális hálózatot leíró, több késleltetést tartalmazó modellegyenletre. Az approximációs tételeink bizonyításában szereplő fontosabb konstansok jelentését is itt soroljuk fel.

Az értekezés végén röviden összegezzük a legfontosabb új eredményeket, téziseket.

2. Approximáció sima kezdeti függvények esetén

2.1. Jelölések

Jelölje \mathbb{R} a valós számok halmazát és $d > 0$ egész esetén \mathbb{R}^d a d dimenziós valós vektorteret, $\mathbb{R}^{d \times d}$ pedig a $d \times d$ típusú valós mátrixok terét. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma \mathbb{R}^d -n. Ha $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, akkor az A mátrix *indukált normáját* illetve *Lozinszkij-mértékét* $\|A\|$ -val illetve $\mu(A)$ -val jelöljük, azaz

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

illetve

$$\mu(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\|E + \delta A\| - 1}{\delta},$$

ahol $E \in \mathbb{R}^{d \times d}$ az egységmátrix. A szokásos \mathbb{R}^d -beli normák esetén $\|A\|$ és $\mu(A)$ értékeit az alábbi táblázat tartalmazza [36]:

	$\ x\ $	$\ A\ $	$\mu(A)$
ℓ_∞	$\sup_i x_i $	$\sup_i \sum_j a_{ij} $	$\sup_i \left(a_{ii} + \sum_{j,j \neq i} a_{ij} \right)$
ℓ_1	$\sum_i x_i $	$\sup_j \sum_i a_{ij} $	$\sup_j \left(a_{jj} + \sum_{i,i \neq j} a_{ij} \right)$
ℓ_2	$\left(\sum_i x_i ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\lambda^*}$	$\hat{\lambda}$

1. táblázat.

Az 1. táblázatban λ^* illetve $\hat{\lambda}$ az $A^T A$ illetve az $\frac{1}{2}(A^T + A)$ mátrix legnagyobb karakterisztikus gyökét jelöli.

A fentiekén kívül a Lozinszkij-mérték rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal

is:

$$\mu(\alpha A) = \alpha \mu(A) \quad \text{valahányszor } \alpha > 0 \text{ és } A \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

$$|\mu(A)| \leq \|A\| \quad \text{valahányszor } A \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

$$\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad \text{valahányszor } A, B \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

és

$$s(A) \leq \mu(A),$$

ahol

$$s(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \det(A - \lambda E) = 0 \}$$

az $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrix *spektrálabscisszája*.

Könnyű belátni, hogy ha $d = 1$, akkor $\mu(A) = A$. Tehát μ értéke negatív is lehet.

A Lozinszkij-mérték segítségével becslést adhatunk az

$$x' = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer e^{At} alapmátrixának növekedésére is, éspedig (lásd [12, 36])

$$\|e^{At}\| \leq e^{\mu(A)t} \quad \text{valahányszor } t \geq 0.$$

2.2. A késleltetett differenciálegyenlet és az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer

Tekintsük az

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) + g(x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

késleltetett differenciálegyenletet, ahol $\tau > 0$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvények.

Bármely $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos kezdeti függvény esetén a (2.1) egyenletnek létezik olyan x megoldása, amelyre teljesül a

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (2.2)$$

kezdeti feltétel.

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy f és g Lipschitz-folytonos függvények, azaz léteznek $L, K > 0$ konstansok úgy, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L \|u - v\| \quad (2.3)$$

és

$$\|g(u) - g(v)\| \leq K \|u - v\|. \quad (2.4)$$

Ekkor a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldása egyértelmű és értelmezve van a teljes $[-\tau, \infty)$ intervallumon.

Bármely $n \geq 2$ egész és $t \geq 0$ esetén legyen

$$x_0^{[n]}(t) = x(t), \quad (2.5)$$

$$x_j^{[n]}(t) = \int_{t-j\frac{\tau}{n}}^{t-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(x(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.6)$$

és

$$\mu_j^{[n]}(t) = \frac{n}{\tau} x_j^{[n]}(t) - g\left(x\left(t - j\frac{\tau}{n}\right)\right), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.7)$$

A (2.6) egyenletből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ és $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\left(x_j^{[n]}\right)'(t) = g\left(x\left(t - (j-1)\frac{\tau}{n}\right)\right) - g\left(x\left(t - j\frac{\tau}{n}\right)\right), \quad (2.8)$$

továbbá a (2.7) egyenletből

$$g\left(x\left(t - j\frac{\tau}{n}\right)\right) = \frac{n}{\tau} x_j^{[n]}(t) - \mu_j^{[n]}(t). \quad (2.9)$$

Alkalmazva a (2.5) és (2.9) összefüggéseket a (2.1) egyenletben, illetve (2.8) fel-

használásával belátható, hogy az $x^{[n]} = (x_0^{[n]}, x_1^{[n]}, \dots, x_n^{[n]})^T$ vektorfüggvény megoldása az

$$\begin{aligned} x'_0 &= Ax_0 + f(x_0) + \frac{n}{\tau}x_n - \mu_n^{[n]}(t), \\ x'_1 &= g(x_0) - \frac{n}{\tau}x_1 + \mu_1^{[n]}(t), \\ x'_j &= \frac{n}{\tau}x_{j-1} - \frac{n}{\tau}x_j + \mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t), \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (2.10)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszernek, és ezen megoldás kezdeti értékei

$$x_0(0) = \phi(0) \quad \text{és} \quad x_j(0) = \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(\phi(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.11)$$

Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert a (2.10) egyenletrendszerből a $\mu_j^{[n]}(t)$ hibatagok elhagyásával kapjuk. Tehát a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldását az

$$\begin{aligned} y'_0 &= Ay_0 + f(y_0) + \frac{n}{\tau}y_n, \\ y'_1 &= g(y_0) - \frac{n}{\tau}y_1, \\ y'_j &= \frac{n}{\tau}y_{j-1} - \frac{n}{\tau}y_j, \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (2.12)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó

$$y_0(0) = \phi(0) \quad \text{és} \quad y_j(0) = \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(\phi(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.13)$$

kezdetiérték-feladat megoldásának y_0 komponensével fogjuk közelíteni.

2.3. Approximációs tételek

Ebben a szakaszban fogalmazzuk meg a fejezet két fő eredményét. A 2.1. Tétel azt mutatja, hogy ha a késleltetett differenciálegyenlet megoldása elegendően sima a kezdeti intervallumon, akkor a megoldás approximációjára bármely véges intervallumon használhatjuk a (2.12) – (2.13) kezdetiérték-feladat megoldásának y_0 komponensét. A tétel a konvergencia nagyságrendjére is ad becslést.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek. Legyen $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható, $\phi' : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz-folytonos, és*

$$\phi'(0-) = A\phi(0) + f(\phi(0)) + g(\phi(-\tau)). \quad (2.14)$$

Tegyük fel azt is, hogy $g = (g_1, \dots, g_d)^T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható, és a

$$g'(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq d}, \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d \quad (2.15)$$

képlettel definiált $g' : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ függvény Lipschitz-folytonos \mathbb{R}^d kompakt részhalmazain. Legyen x a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldása, továbbá tetszőleges $n \geq 2$ egész esetén legyen $y^{[n]} = (y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]})^T$ a (2.12) – (2.13) kezdetiérték-feladat megoldása. Ekkor minden $T > 0$ esetén létezik $C > 0$ úgy, hogy minden $n \geq 2$ -re

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x(t) - y_0^{[n]}(t)\| \leq \frac{C}{n}. \quad (2.16)$$

Speciálisan $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen $[0, \infty)$ minden zárt részintervallumán, amint $n \rightarrow \infty$.

A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy bizonyos feltételek mellett a 2.1. Tételben leírt approximáció egyenletes a teljes $[0, \infty)$ intervallumon, és a konvergencia nagyságrendjére is hasonló becslést kapunk.

2.2. Tétel. *Ha a 2.1. Tétel feltételein kívül még azt is feltesszük, hogy x korlátos $[0, \infty) - n$ és*

$$L + K < -\mu(A), \quad (2.17)$$

akkor a (2.16) egyenlőtlenségben szereplő C konstans T értékétől független, azaz minden $n \geq 2 - re$

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|x(t) - y_0^{[n]}(t)\| \leq \frac{C}{n}. \quad (2.18)$$

Speciálisan $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen a teljes $[0, \infty)$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$.

2.1. Megjegyzés. Ha ϕ és g kétszer folytonosan deriválható, akkor a differenciálszámítás középérték tételéből következik, hogy ϕ' Lipschitz-folytonos $[-\tau, 0] - n$ és g' Lipschitz-folytonos \mathbb{R}^d minden kompakt részhalmazán.

2.2. Megjegyzés. A (2.14) kompatibilitási feltétel garantálja a megoldás differenciálhatóságát a nullában.

2.4. Előzetes eredmények

Ebben a szakaszban bebizonyítunk néhány lemmát, amelyek majd fontos szerepet játszanak a 2.1. és 2.2. Tételek bizonyításában.

2.1. Lemma. Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek, továbbá a ϕ és g függvényekre teljesülnek a 2.1. Tétel feltételei. Legyen x a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldása. Ekkor tetszőleges $T > 0$ esetén x és x' Lipschitz-folytonos $[-\tau, T] - n$. Továbbá, ha x korlátos $[0, \infty) - n$, akkor x és x' Lipschitz-folytonos a teljes $[-\tau, \infty) - n$.

Bizonyítás. Legyen $T > 0$. Ekkor a (2.14) feltétel miatt $x'(0)$ létezik, továbbá ϕ' és a (2.1) egyenlet jobb oldalán szereplő függvény folytonosságából adódóan x' folytonos $[-\tau, T] - n$. Legyen

$$L_1 = \sup_{t \in [-\tau, T]} \|x'(t)\| < \infty.$$

A Lagrange-féle középérték-tételből következik, hogy tetszőleges $t_1, t_2 \in [-\tau, T]$ esetén

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq L_1 |t_1 - t_2|. \quad (2.19)$$

Tehát x Lipschitz-folytonos $[-\tau, T] - n$. Ugyanakkor $x' = \phi'$ Lipschitz-folytonos $[-\tau, 0] - n$ valamilyen $L_2 > 0$ Lipschitz-konstanssal. Ebből, valamint a (2.3), (2.4)

és a (2.19) feltételekből következik, hogy a (2.1) egyenlet jobb oldalán szereplő függvény, és ezért x' is Lipschitz-folytonos $[0, T]$ -n valamely $L_3 > 0$ Lipschitz-konstanssal. Legyen $L_4 = \max\{L_2, L_3\}$. Ekkor $-\tau \leq t_1 \leq 0 \leq t_2 \leq T$ esetén

$$\|x'(t_2) - x'(t_1)\| \leq \|x'(t_2) - x'(0)\| + \|x'(0) - x'(t_1)\| \leq L_3 t_2 - L_2 t_1 \leq L_4 (t_2 - t_1).$$

Tehát x' Lipschitz-folytonos $[-\tau, T]$ -n.

Most tegyük fel, hogy x korlátos $[0, \infty)$ -n. Ekkor f és g korlátos az $x([-\tau, \infty))$ képhalmazon, amiből már következik x' korlátossága a $[0, \infty)$ intervallumon. Mivel $x' = \phi'$ korlátos a $[-\tau, 0]$ intervallumon, ezért

$$L_5 = \sup_{t \in [-\tau, \infty)} \|x'(t)\| < \infty. \quad (2.20)$$

Ebből már következik x Lipschitz-folytonossága az L_5 Lipschitz-konstanssal a teljes $[-\tau, \infty)$ intervallumon. A fentiekhez hasonlóan látható be x' Lipschitz-folytonossága $[-\tau, \infty)$ -n. ■

2.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek, továbbá a ϕ és g függvényekre teljesülnek a 2.1. Tétel feltételei. Legyen x a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldása. Tetszőleges $n \geq 2$ egész esetén legyenek $x_j^{[n]}$ és $\mu_j^{[n]}$ a (2.6) és a (2.7) képletekkel definiált függvények. Ekkor tetszőleges $T > 0$ esetén létezik $M > 0$ úgy, hogy minden $n \geq 2$ -re*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mu_j^{[n]}(t)\| \leq \frac{M}{n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.21)$$

és

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t)\| \leq \frac{M}{n^2}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (2.22)$$

Ha azt is feltesszük, hogy x korlátos $[0, \infty)$ -n, akkor a fenti M konstans T értékétől független, azaz tetszőleges $n \geq 2$ esetén

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\mu_j^{[n]}(t)\| \leq \frac{M}{n}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.23)$$

és

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t)\| \leq \frac{M}{n^2}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (2.24)$$

Bizonyítás. Legyen $n \geq 2$ és $T > 0$ rögzített. A rövidség kedvéért legyen $h = \frac{\tau}{n}$. A (2.6) és a (2.7) egyenletekből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ és $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\begin{aligned} \mu_j^{[n]}(t) &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} g(x(s)) ds - g(x(t-jh)) \\ &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} [g(x(s)) - g(x(t-jh))] ds. \end{aligned}$$

A 2.1. Lemma alapján létezik $H = H(T) > 0$ konstans úgy, hogy

$$\|x(t_2) - x(t_1)\| \leq H(t_2 - t_1), \quad -\tau \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad (2.25)$$

$$\|x'(t_2) - x'(t_1)\| \leq H(t_2 - t_1), \quad -\tau \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (2.26)$$

A (2.4) és a (2.25) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy minden $t \in [0, T]$ és $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\begin{aligned} \|\mu_j^{[n]}(t)\| &\leq \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} \|g(x(s)) - g(x(t-jh))\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} K \|x(s) - x(t-jh)\| ds \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} KH(s - (t-jh)) ds \\ &= \frac{1}{h} KH \frac{1}{2} h^2 = KH \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Tehát (2.21) teljesül valahányszor

$$M \geq KH \frac{\tau}{2}. \quad (2.27)$$

A (2.22) egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \mu_{j-1}^{[n]}(t) &= \frac{1}{h} \int_{t-(j-1)h}^{t-(j-2)h} g(x(u)) du - g(x(t-(j-1)h)) \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-(j-1)h}^{t-(j-2)h} [g(x(u)) - g(x(t-(j-1)h))] du \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} [g(x(s+h)) - g(x(t-(j-1)h))] ds,
 \end{aligned}$$

valahányszor $t \geq 0$, $n \geq 2$ és $2 \leq j \leq n$. Ebből a (2.4) és a (2.26) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy tetszőleges $t \in [0, T]$ és $2 \leq j \leq n$ esetén

$$\begin{aligned}
 &\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t) \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} [g(x(s)) - g(x(t-jh))] ds \\
 &\quad - \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} [g(x(s+h)) - g(x(t-(j-1)h))] ds \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} ([g(x(s)) - g(x(t-jh))] - [g(x(s+h)) - g(x(t-(j-1)h))]) ds \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} \left(\int_{t-jh}^s \frac{d}{du} [g(x(u)) - g(x(u+h))] du \right) ds \\
 &= \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} \left(\int_{t-jh}^s G(u) du \right) ds,
 \end{aligned}$$

ahol

$$G(u) = \frac{d}{du} [g(x(u)) - g(x(u+h))].$$

Innen kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ és $2 \leq j \leq n$ esetén

$$\|\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t)\| \leq \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} \left(\int_{t-jh}^s \|G(u)\| du \right) ds. \quad (2.28)$$

Ha $u \in [-\tau, T-h]$, akkor

$$\begin{aligned} & \|G(u)\| \\ &= \|g'(x(u))x'(u) - g'(x(u+h))x'(u+h)\| \\ &= \|g'(x(u))[x'(u) - x'(u+h)] + [g'(x(u)) - g'(x(u+h))]x'(u+h)\| \\ &\leq S_1 \|x'(u) - x'(u+h)\| + S_2 \|g'(x(u)) - g'(x(u+h))\|, \end{aligned}$$

ahol

$$S_1 = \sup_{v \in x([-\tau, T])} \|g'(v)\|, \quad \text{és} \quad S_2 = \sup_{t \in [-\tau, T]} \|x'(t)\|. \quad (2.29)$$

Mivel x folytonos, ezért az $x([-\tau, T])$ képhalmaz \mathbb{R}^d korlátos részhalmaza. Ebből és a g' és x' függvények folytonosságából következik, hogy S_1 és S_2 végesek. A feltétel szerint a g' függvény Lipschitz-folytonos a $x([-\tau, T]) \subset \mathbb{R}^d$ korlátos halmazon valamely $K^* > 0$ Lipschitz-konstanssal. A (2.28) egyenlőtlenségből, a $\|G(u)\|$ -ra vonatkozó becslésből valamint a (2.25) és (2.26) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t)\| &\leq \frac{1}{h} \int_{t-jh}^{t-(j-1)h} \left(\int_{t-jh}^s hH(S_1 + S_2K^*) du \right) ds \\ &= \frac{h^2}{2} H(S_1 + S_2K^*) \end{aligned} \quad (2.30)$$

valahányszor $t \in [0, T]$, $n \geq 2$ egész és $2 \leq j \leq n$. Tehát a (2.22) egyenlőtlenség teljesül valahányszor

$$M \geq \frac{\tau^2}{2} H(S_1 + S_2K^*). \quad (2.31)$$

Most tegyük fel, hogy x korlátos $[0, \infty)$ -n. Ekkor a 2.1. Lemma alapján a (2.25) és a (2.26) egyenlőtlenségekben szereplő H konstans független T értékétől, azaz (2.25) és (2.26) teljesül tetszőleges $-\tau \leq t_1 \leq t_2$ esetén. A fentiekhez hason-

lőan láthatjuk be, hogy tetszőleges $t \geq 0$, $n \geq 2$ és $1 \leq j \leq n$ esetén

$$\|\mu_j^{[n]}(t)\| \leq KH \frac{h}{2}. \quad (2.32)$$

Tehát a hibatagokra vonatkozó (2.23) becslés teljesül valahányszor

$$M \geq KH \frac{\tau}{2}. \quad (2.33)$$

Ugyanakkor, mivel $x([-\tau, \infty))$ az \mathbb{R}^d tér korlátos részhalmaza és a g' függvény folytonos ezen a halmazon, ezért

$$\tilde{S}_1 = \sup_{v \in x([-\tau, \infty))} \|g'(v)\| < \infty. \quad (2.34)$$

A 2.1. Lemma bizonyításában megmutattuk, hogy ha x korlátos $[0, \infty)$ -n, akkor x' korlátos $[-\tau, \infty)$ -n, azaz

$$\tilde{S}_2 = \sup_{t \in [-\tau, \infty)} \|x'(t)\| < \infty. \quad (2.35)$$

A feltétel szerint a g' függvény Lipschitz-folytonos az $x([-\tau, \infty)) \subset \mathbb{R}^d$ korlátos halmazon valamely $\tilde{K} > 0$ konstanssal. Az előzőekhez hasonlóan kapjuk a (2.28) egyenlőtlenségből, hogy

$$\|\mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t)\| \leq \frac{h^2}{2} H (\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \tilde{K}) \quad (2.36)$$

tetszőleges $t \geq 0$, $n \geq 2$ és $2 \leq j \leq n$ esetén. Tehát a hibatagokra vonatkozó (2.24) egyenlőtlenség teljesül valahányszor

$$M \geq \frac{\tau^2}{2} H (\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \tilde{K}). \quad (2.37)$$

■

2.5. Az approximációs tételek bizonyítása

A 2.1. Tétel bizonyítása. Tetszőleges $n \geq 2$ egész, $t \geq 0$ és $0 \leq j \leq n$ esetén legyen

$$z_j(t) = x_j^{[n]}(t) - y_j^{[n]}(t),$$

ahol $x_j^{[n]}$ a (2.5) és (2.6) képlettel definiált függvény. Legyen $h = \frac{\tau}{n}$. A (2.10) és (2.12) összefüggésekből kapjuk, hogy a $z = (z_0, \dots, z_n)^T$ függvény megoldása a

$$\begin{aligned} z_0' &= Az_0 + f\left(y_0^{[n]}(t) + z_0\right) - f\left(y_0^{[n]}(t)\right) + \frac{1}{h}z_n - \mu_n^{[n]}(t), \\ z_1' &= g\left(y_0^{[n]}(t) + z_0\right) - g\left(y_0^{[n]}(t)\right) - \frac{1}{h}z_1 + \mu_1^{[n]}(t), \\ z_j' &= \frac{1}{h}z_{j-1} - \frac{1}{h}z_j + \mu_j^{[n]}(t) - \mu_{j-1}^{[n]}(t), \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (2.38)$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszernek, amelyre teljesülnek a

$$z_j(0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (2.39)$$

kezdeti feltételek.

A (2.38) rendszer első egyenletéből a konstans variációs formula alapján kapjuk, hogy

$$z_0(t) = e^{At}z_0(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \left(f\left(y_0^{[n]}(s) + z_0(s)\right) - f\left(y_0^{[n]}(s)\right) + \frac{1}{h}z_n(s) - \mu_n^{[n]}(s) \right) ds$$

minden $t \geq 0$ esetén. Ebből és (2.39) –ből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$z_0(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \left(f\left(y_0^{[n]}(s) + z_0(s)\right) - f\left(y_0^{[n]}(s)\right) + \frac{1}{h}z_n(s) - \mu_n^{[n]}(s) \right) ds. \quad (2.40)$$

Hasonlóan adódik, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$z_1(t) = \int_0^t e^{-\frac{E(t-s)}{h}} \left(g\left(y_0^{[n]}(s) + z_0(s)\right) - g\left(y_0^{[n]}(s)\right) + \mu_1^{[n]}(s) \right) ds \quad (2.41)$$

és

$$z_j(t) = \int_0^t e^{\frac{-E(t-s)}{h}} \left(\frac{1}{h} z_{j-1}(s) + \mu_j^{[n]}(s) - \mu_{j-1}^{[n]}(s) \right) ds, \quad 2 \leq j \leq n, \quad (2.42)$$

ahol $E \in \mathbb{R}^{d \times d}$ az egységmátrix.

Legyen $T > 0$. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $e^{Et} = e^t E$, ezért

$$\|e^{Et}\| = e^t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

A (2.23), (2.41) és (2.43) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy minden $t \in [0, T]$ esetén

$$\begin{aligned} \|z_1(t)\| &\leq \int_0^t \|e^{\frac{-E(t-s)}{h}}\| \left(K \|z_0(s)\| + \|\mu_1^{[n]}(s)\| \right) ds \\ &\leq \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{h}} \left(K \|z_0(s)\| + \frac{M}{\tau} h \right) ds. \end{aligned}$$

Legyen

$$\zeta(t) = \max_{s \in [0, t]} \|z_0(s)\|, \quad t \geq 0. \quad (2.44)$$

Figyelembe véve, hogy $t \geq 0$ esetén

$$\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{h}} ds = h \left(1 - e^{-\frac{t}{h}} \right) \leq h, \quad (2.45)$$

azt kapjuk, hogy

$$\|z_1(t)\| \leq h \left(K \zeta(t) + \frac{M}{\tau} h \right), \quad t \in [0, T]. \quad (2.46)$$

Legyen $n \geq 2$ rögzített. Indukcióval j szerint bebizonyítjuk, hogy

$$\|z_j(t)\| \leq h \left(K \zeta(t) + \frac{M}{\tau} h + (j-1) \frac{M}{\tau^2} h^2 \right), \quad t \in [0, T] \quad (2.47)$$

minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén. A (2.46) egyenlőtlenségből következik, hogy (2.47) igaz $j = 1$ esetén. Most tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $j \in \{1, \dots, (n-1)\}$ esetén. Ekkor (2.22), (2.42) és (2.43) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|z_{j+1}(t)\| &\leq \int_0^t e^{-\frac{E(t-s)}{h}} \left\| \left(\frac{1}{h} \|z_j(s)\| + \|\mu_{j+1}^{[n]}(s) - \mu_j^{[n]}(s)\| \right) \right\| ds \\
&\leq \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{h}} \left(K\zeta(s) + \frac{M}{\tau}h + (j-1)\frac{M}{\tau^2}h^2 + \|\mu_{j+1}^{[n]}(t) - \mu_j^{[n]}(t)\| \right) ds \\
&\leq \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{h}} \left(K\zeta(s) + \frac{M}{\tau}h + (j-1)\frac{M}{\tau^2}h^2 + \frac{M}{\tau^2}h^2 \right) ds \\
&= \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{h}} \left(K\zeta(s) + \frac{M}{\tau}h + j\frac{M}{\tau^2}h^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Mivel ζ monoton növekedő, ezért minden $t \in [0, T]$ és $1 \leq j \leq n-1$ esetén

$$\begin{aligned}
\|z_{j+1}(t)\| &\leq \left(K\zeta(t) + \frac{M}{\tau}h + j\frac{M}{\tau^2}h^2 \right) \int_0^t e^{-\frac{(t-s)}{h}} ds \\
&\leq \left(K\zeta(t) + \frac{M}{\tau}h + j\frac{M}{\tau^2}h^2 \right) h,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség (2.45) –ből következik. Tehát a (2.47) egyenlőtlenség igaz minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén.

A (2.47) egyenlőtlenségből a $j = n$ választással kapjuk, hogy

$$\|z_n(t)\| \leq h \left(K\zeta(t) + \frac{M}{\tau}h + (n-1)\frac{M}{\tau^2}h^2 \right), \quad t \in [0, T].$$

Mivel $(n-1)h \leq nh = \tau$, ezért

$$\|z_n(t)\| \leq h \left(K\zeta(t) + \frac{2M}{\tau}h \right), \quad t \in [0, T]. \quad (2.48)$$

Amint a 2.1. szakaszban megjegyeztük, érvényes az

$$\|e^{At}\| \leq e^{\mu(A)t}, \quad t \geq 0 \quad (2.49)$$

egyenlőtlenség. Ennek és a (2.21), (2.40) illetve (2.48) összefüggéseknek a felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|z_0(t)\| &\leq \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \left(L \|z_0(s)\| + \frac{1}{h} \|z_n(s)\| + \|\mu_n^{[n]}(s)\| \right) ds \\ &\leq \int_0^t e^{\mu(A)(t-s)} \left(L \|z_0(s)\| + \frac{1}{h} \|z_n(s)\| + \|\mu_n^{[n]}(s)\| \right) ds \\ &\leq \int_0^t e^{\mu(A)(t-s)} \left(L \|z_0(s)\| + \frac{1}{h} h \left(K\zeta(s) + \frac{2M}{\tau} h \right) + \frac{M}{\tau} h \right) ds. \end{aligned}$$

A (2.44) definícióból kapjuk, hogy $s \geq 0$ esetén $\|z_0(s)\| \leq \zeta(s)$, ezért

$$\|z_0(t)\| \leq \int_0^t e^{\mu(A)(t-s)} \left(L\zeta(s) + K\zeta(s) + \frac{3M}{\tau} h \right) ds, \quad t \in [0, T].$$

Legyen

$$\kappa = \max_{t \in [0, T]} e^{\mu(A)t}. \quad (2.50)$$

Ekkor $t \in [0, T]$ esetén

$$\begin{aligned} \|z_0(t)\| &\leq \int_0^t \kappa (L + K) \zeta(s) ds + \kappa \frac{3M}{\tau} ht \\ &\leq \kappa (L + K) \int_0^t \zeta(s) ds + \kappa \frac{3M}{\tau} hT. \end{aligned}$$

Felhasználva ismét a (2.44) definíciót, azt kapjuk, hogy minden $u \in [0, T]$ esetén

$$\zeta(u) = \max_{t \in [0, u]} \|z_0(t)\| \leq \kappa(L + K) \int_0^u \zeta(s) ds + \kappa \frac{3M}{\tau} hT.$$

Innen a Gronwall-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$\zeta(u) \leq \kappa \frac{3M}{\tau} hT e^{\kappa(L+K)u}, \quad u \in [0, T].$$

Tehát

$$\|z_0(u)\| \leq \zeta(u) \leq \kappa \frac{3M}{\tau} hT e^{\kappa(L+K)u}, \quad u \in [0, T],$$

amiből már következik, hogy

$$\|x(u) - y_0^{[n]}(u)\| = \|z_0(u)\| \leq \gamma h, \quad u \in [0, T],$$

ahol

$$\gamma = \kappa \frac{3M}{\tau} T e^{\kappa(L+K)T} \tag{2.51}$$

Tehát a (2.16) egyenlőtlenség teljesül valahányszor

$$C \geq \gamma \tau. \tag{2.52}$$

■

A 2.2. Tétel bizonyítása. Most tegyük fel, hogy x korlátos $[0, \infty)$ -n. A (2.47) egyenlőtlenség bizonyításához hasonlóan - a (2.23) és (2.24) egyenlőtlenségek felhasználásával - belátható, hogy minden $t \geq 0$ és $n \geq 2$ egész esetén

$$\|z_j(t)\| \leq h \left(K \zeta(t) + \frac{M}{\tau} h + (j-1) \frac{M}{\tau^2} h^2 \right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Figyelembe véve, hogy ζ monoton növekedő, a 2.1. Tétel bizonyításhoz hasonlóan

kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \|z_0(t)\| &\leq \int_0^t e^{\mu(A)(t-s)} \left((L+K)\zeta(s) + \frac{3M}{\tau}h \right) ds \\ &\leq \left((L+K)\zeta(t) + \frac{3M}{\tau}h \right) \int_0^t e^{\mu(A)(t-s)} ds \\ &= \left((L+K)\zeta(t) + \frac{3M}{\tau}h \right) \frac{1}{-\mu(A)} (1 - e^{\mu(A)t}). \end{aligned}$$

Mivel $\mu(A) < 0$ (lásd (2.17)), ezért minden $t \geq 0$ -ra

$$\|z_0(t)\| \leq \frac{L+K}{-\mu(A)}\zeta(t) + \frac{3M}{-\mu(A)\tau}h.$$

Ismét felhasználva, hogy ζ monoton növekedő, azt kapjuk, hogy

$$\zeta(u) = \max_{t \in [0, u]} \|z_0(t)\| \leq \frac{L+K}{-\mu(A)}\zeta(u) + \frac{3M}{-\mu(A)\tau}h$$

valahányszor $u \geq 0$. Ebből következik, hogy

$$\left(1 - \frac{L+K}{-\mu(A)} \right) \zeta(u) \leq \frac{3M}{-\mu(A)\tau}h, \quad u \geq 0,$$

és innen

$$\zeta(u) \leq \frac{3Mh}{-\mu(A)\tau} \left(1 - \frac{L+K}{-\mu(A)} \right)^{-1} = \frac{3M}{-\mu(A)n} \left(1 - \frac{L+K}{-\mu(A)} \right)^{-1}, \quad u \geq 0.$$

Tehát minden $u \geq 0$ esetén

$$\|x(u) - y_0^{[n]}(u)\| = \|z_0(u)\| \leq \zeta(u) \leq \frac{C}{n}$$

valahányszor

$$C \geq \frac{3M}{-\mu(A)} \left(1 - \frac{L+K}{-\mu(A)} \right)^{-1}. \quad (2.53)$$

■

A 2.1. és 2.2. Tételek bizonyításában szereplő fontosabb konstansokat és jelentésüket a B. Függelékben soroltuk fel.

3. Approximáció folytonos kezdeti függvények esetén

3.1. Approximációs tételek

Ebben a fejezetben a 2.1. és 2.2. Tételekhez hasonló approximációs tételeket fogunk igazolni abban az esetben, ha elhagyjuk a kezdeti függvényre vonatkozó simasági feltételt. Meg fogjuk mutatni, hogy az approximáció az általános esetben is - véges és végtelen intervallumon egyaránt - egyenletes, azonban a konvergencia nagyságrendjére nem tudunk becslést adni. A fejezet fő eredménye a következő két tétel.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az 2.1. Tétel feltételei, azzal a különbséggel, hogy a $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ kezdeti függvényről csak azt tesszük fel, hogy folytonos. Ekkor a 2.1. Tétel jelöléseivel $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen $[0, \infty)$ tetszőleges zárt részintervallumán, amint $n \rightarrow \infty$.*

3.2. Tétel. *Ha a 3.1. Tétel feltételei mellett még azt is feltesszük, hogy x korlátos a $[0, \infty)$ intervallumon és teljesül a (2.17) feltétel is, akkor $y_0^{[n]} \rightarrow x$ egyenletesen a teljes $[0, \infty)$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$.*

A 3.1. és 3.2. Tételt a 3.4. szakaszban fogjuk bizonyítani. A bizonyításhoz szükségünk lesz a késleltetett egyenlet, illetve az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásainak egymástól való távolságára vonatkozó becslésekre.

3.2. A késleltetett egyenlet megoldásainak egymástól való távolsága

A (2.1) késleltetett egyenlet szokásos fázistere $\mathcal{C} = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^d)$, a $[-\tau, 0]$ intervallumot \mathbb{R}^d -be képező folytonos függvények Banach tere a szuprénum normával, azaz

$$\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|, \quad \phi \in \mathcal{C}.$$

Bármely $\phi \in \mathcal{C}$ esetén a (2.1) – (2.2) kezdetiérték-feladat megoldását jelöljük x^ϕ -vel.

A (2.1) egyenlet két különböző megoldásának egymástól való távolságát az

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

skaláris differenciálegyenlet valós karakterisztikus gyökének segítségével fogjuk becsülni, ahol

$$a = \mu(A) + L \quad \text{és} \quad b = K. \quad (3.2)$$

A (3.1) egyenlet *karakterisztikus egyenlete*

$$g(\lambda) = 0, \quad \text{ahol} \quad g(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau}. \quad (3.3)$$

Könnyű belátni, hogy $g' > 0$, $g(-\infty) = -\infty$ és $g(\infty) = \infty$. Ezekből pedig következik, hogy a (3.3) egyenletnek egyetlen valós gyöke van.

Most már megfogalmazhatjuk a (2.1) egyenlet két különböző megoldásának egymástól való távolságára vonatkozó eredményünket.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az (2.3) és (2.4) feltételek. Legyen λ_0 a (3.3) egyenlet valós gyöke. Ekkor bármely $\alpha > \lambda_0$ esetén létezik $\gamma > 0$ konstans úgy, hogy*

$$\|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| \leq \gamma \|\phi - \psi\| e^{\alpha t} \quad (3.4)$$

valahányszor $\phi, \psi \in \mathcal{C}$ és $t \geq 0$.

A 3.3. Tételből elegendő feltételt kaphatunk a (2.1) egyenlet megoldásainak globális exponenciális stabilitására. Emlékeztetőül, a (2.1) egyenlet x^ϕ megoldását *globálisan exponenciálisan stabilnak* nevezük, ha léteznek $\gamma > 0$ és $\eta > 0$ konstansok úgy, hogy minden $\psi \in \mathcal{C}$ és $t \geq 0$ esetén

$$\|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| \leq \gamma e^{-\eta t} \|\phi - \psi\|.$$

Mivel $g(0) = -a - b = -\mu(A) - L - K$, ezért a (2.17) feltétel mellett $g(0) > 0$. Ebből és a $g(-\infty) = -\infty$ összefüggésből következik, hogy a (2.17) feltétel mellett

a (3.3) karakterisztikus egyenlet λ_0 valós gyöke negatív. Ezért a 3.3. Tételből a következő stabilitási kritériumot kapjuk.

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek. Ekkor a (2.17) feltétel mellett a (2.1) egyenlet bármely megoldása globálisan exponenciálisan stabil.*

Amint azt a [40] dolgozatban megmutattuk, a 3.4. Tétel általánosít több korábbi stabilitási kritériumot.

A 3.3. Tétel bizonyításához szükségünk lesz a monoton dinamikai rendszerek elméletéből ismert összehasonlító elvre. Ennek megfogalmazásához vezessünk be néhány jelölést.

Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_d)^T \in \mathbb{R}^d$. Azt mondjuk, hogy $x \leq y$, ha minden $1 \leq i \leq d$ esetén $x_i \leq y_i$.

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixot *nemnegatív*nak nevezünk, ha $a_{ij} \geq 0$ minden $1 \leq i, j \leq d$ esetén. Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixot *lényegében nemnegatív*nak nevezük, ha minden $1 \leq i, j \leq d, i \neq j$ esetén $a_{ij} \geq 0$.

Legyen $\phi, \psi \in \mathcal{C}$. Azt mondjuk hogy $\phi \leq \psi$, ha $\phi \leq \psi$ pontonként a $[-\tau, 0]$ intervallumon.

Tekintsük az

$$x'(t) = F(x_t), \quad (3.5)$$

funkcionál differenciálegyenletet, ahol $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, Ω nyílt részhalmaza \mathcal{C} -nek és az $x_t \in \mathcal{C}$ szimbólum definíciója

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

ahol $\tau \geq 0$ a maximális késleltetés. Tegyük fel, hogy F Lipschitz-folytonos Ω minden kompakt részhalmazán. Ekkor tetszőleges $\phi \in \Omega$ esetén a (3.5) egyenletnek egyetlen olyan nemfolytatható x megoldása van, amelyre teljesül az

$$x_0 = \phi \quad (3.6)$$

kezdeti feltétel. A továbbiakban a (3.5)–(3.6) kezdetiérték-feladat nemfolytatható megoldását jelölje x^ϕ .

Minden $1 \leq i \leq d$ esetén legyen F_i az F funkcionál i -edik koordináta-függvényét, azaz

$$F(\phi) = (F_1(\phi), \dots, F_d(\phi))^T, \quad \phi \in \Omega.$$

Az irodalomban többen is kerestek olyan feltételt, amely garantálja, hogy a (3.5) egyenlet által generált $\Phi(t, \phi) = x_t^\phi$, $t \geq 0, \phi \in \mathcal{C}$, félfolyam *monoton*, azaz

$$x_t^\phi \leq x_t^\psi \quad \text{valahányszor } \phi, \psi \in \Omega, \phi \leq \psi \text{ és } t \geq 0.$$

Smith [47] bizonyította, hogy a fenti értelemben vett monotonitás elegendő feltétele az alábbi ún. *kvázimonoton feltétel*:

$$\text{Ha } \phi, \psi \in \Omega, \phi \leq \psi \text{ és } \phi_i(0) = \psi_i(0) \text{ valamely } i \text{ esetén, akkor } F_i(\phi) \leq F_i(\psi). \quad (\text{QM})$$

A (QM) feltétel a közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert *Kamke-féle feltétel* analogonja. A következő összehasonlító kritérium a monoton dinamikai rendszerek elméletének egyik alaptétele (lásd [45, 48]).

3.5. Tétel. *Legyen Ω nyílt részhalmaza \mathcal{C} -nek. Tegyük fel, hogy $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz-folytonos Ω tetszőleges kompakt részhalmazán és eleget tesz a (QM) feltételnek. Legyen $0 < b \leq \infty$. Tegyük fel, hogy $y : [-\tau, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény és eleget tesz a*

$$\frac{d^+}{dt}y(t) \leq F(y_t), \quad t \in [0, b) \quad (3.7)$$

differenciálegyenlőtlenségnek, ahol $\frac{d^+}{dt}$ a jobb oldali deriváltat jelöli. Ha $y_0 \leq \phi$ valamely $\phi \in \mathcal{C}$ esetén, akkor $y(t) \leq x^\phi(t)$ minden olyan $t \in [-\tau, b) - re$, amelyre $x^\phi(t)$ értelmezve van.

A 3.5. Tételt a

$$\frac{d^+}{dt}y(t) \leq \tilde{M}y(t) + \tilde{N}y(t - \tau), \quad (3.8)$$

lineáris differenciálegyenlőtlenségre fogjuk alkalmazni, ahol $\tilde{M}, \tilde{N} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. A (3.8)

egyenlőtlenséget (3.7) –ből az

$$F(\phi) = \tilde{M}\phi(0) + \tilde{N}\phi(-\tau), \quad \phi \in \mathcal{C} \quad (3.9)$$

választással kapjuk. Smith egy másik eredménye alapján a (QM) feltétel éppen akkor teljesül a (3.9) lineáris funkcionálra, ha az \tilde{M} mátrix lényegében nemnegatív, \tilde{N} pedig nemnegatív (lásd [48]).

A 3.3. Tétel bizonyításához az összehasonlító kritériumon kívül szükségünk lesz néhány további segédtételre is.

3.1. Lemma. *Ha $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ jobbról differenciálható a t pontban, akkor ugyanilyen $\|y\|$ is, és pedig*

$$\frac{d^+}{dt} \|y\|(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|y(t) + hy'_+(t)\| - \|y(t)\|}{h}.$$

A 3.1. Lemma bizonyítása Coppel monográfiájában található (lásd [12], 3. old.).

A következő lemmában egy differenciálegyenlőtlenséget igazolunk lineáris inhomogén közönséges differenciálegyenletek megoldásaira.

3.2. Lemma. *Tekintsük az*

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

differenciálegyenletet, ahol $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ és $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos. Ekkor a (3.10) egyenlet bármely $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ megoldására

$$\frac{d^+}{dt} \|y\|(t) \leq \mu(A) \|y(t)\| + \|b(t)\|, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. Bármely $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \|y(t) + hy'_+(t)\| - \|y(t)\| &\leq \|y(t) + h(Ay(t) + b(t))\| - \|y(t)\| \\ &\leq (\|E + hA\| - 1) \|y(t)\| + h \|b(t)\|. \end{aligned}$$

A 3.1. Lemmából és a Lozinszkij-mérték definíciójából következik, hogy

$$\frac{d^+}{dt} \|y\| (t) \leq \mu(A) \|y(t)\| + \|b(t)\| \quad (3.11)$$

valahányszor $t \geq 0$. ■

Szükségünk lesz a következő ismert tételre is (lásd [32]), amely a (3.1) késleltetett differenciálegyenlet megoldásainak exponenciális növekedésére ad becslést.

3.6. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és*

$$\beta = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid g(\lambda) = 0 \}$$

a (3.1) egyenlet spektrálabcisszája, ahol g a (3.1) egyenlet karakterisztikus függvénye. Ekkor bármely $\alpha > \beta$ esetén létezik $\gamma > 0$ úgy, hogy a (3.1) egyenlet bármely x^ϕ megoldására

$$|x^\phi(t)| \leq \gamma \|\phi\| e^{\alpha t}, \quad \phi \in \mathcal{C}, \quad t \geq 0.$$

Most már be tudjuk bizonyítani a 3.3. Tételt.

A 3.3. Tétel bizonyítása. Legyen $\phi, \psi \in \mathcal{C}$ és

$$y(t) = x^\phi(t) - x^\psi(t), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Ekkor y megoldása a (3.10) egyenletnek, ahol

$$b(t) = f(x^\phi(t)) - f(x^\psi(t)) + g(x^\phi(t - \tau)) - g(x^\psi(t - \tau)), \quad t \geq 0.$$

Továbbá

$$y(t) = \phi(t) - \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (3.13)$$

A 3.2. Lemma szerint teljesül a (3.11) differenciálegyenlőtlenség, ahol

$$\|b(t)\| \leq \|f(x^\phi(t)) - f(x^\psi(t))\| + \|g(x^\phi(t - \tau)) - g(x^\psi(t - \tau))\|.$$

Ebből és a (2.3), (2.4) feltételekből kapjuk, hogy

$$\frac{d^+}{dt} \|y\| (t) \leq \mu(A) \|y(t)\| + L \|y(t)\| + K \|y(t - \tau)\|, \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

Továbbá

$$\|y(t)\| = \|\phi(t) - \psi(t)\|, \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (3.15)$$

A (3.14) differenciálegyenlőtlenségből a 3.5. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|y(t)\| \leq z^\omega(t), \quad t \geq -\tau. \quad (3.16)$$

ahol z^ω a

$$z'(t) = (\mu(A) + L)z(t) + Kz(t - \tau) \quad (3.17)$$

skaláris differenciálegyenlet

$$\omega(t) = \|\phi(t) - \psi(t)\|, \quad t \in [-\tau, 0] \quad (3.18)$$

kezdeti függvényhez tartozó megoldása. Mivel $K > 0$, Frasson és Lunel egyik eredményéből következik (lásd [17], Lemma B 3.3), hogy a (3.17) egyenlet spektrálabszcisszája megegyezik a (3.3) karakterisztikus egyenlet λ_0 valós gyökével. Ezért a 3.6. Tétel szerint bármely $\alpha > \lambda_0$ esetén létezik $\gamma > 0$ úgy, hogy

$$|z^\omega(t)| \leq \gamma \|\omega\| e^{\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (3.19)$$

Figyelembe véve, hogy $\|\omega\| = \|\phi - \psi\|$, a (3.16) és (3.19) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| = \|y(t)\| \leq z^\omega(t) \leq \gamma \|\omega\| e^{\alpha t} = \gamma \|\phi - \psi\| e^{\alpha t}$$

valahányszor $\phi, \psi \in \mathcal{C}$ és $t \geq 0$. ■

3.3. Az approximáló közönséges egyenletrendszer megoldásainak egymástól való távolsága

Ebben a szakaszban a (2.12) közönséges differenciálegyenlet-rendszer két különböző megoldásának egymástól való távolságára adunk n -től független becslést.

A (2.12) egyenlet fázistere az $\underbrace{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{(n+1)\text{-szer}} = \mathbb{R}^{(n+1)d}$ halmaz. Egy $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$ vektor normáját a

$$\|v\| = \sum_{j=0}^n \|v_j\| \quad (3.20)$$

képlettel értelmezzük, ahol $\|v_j\|$, $0 \leq j \leq n$, az \mathbb{R}^d -n vett eredeti norma. Bármely $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$ esetén a (2.12) egyenletnek egyetlen olyan $y^{[n]} = (y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]})^T : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)d}$ megoldása van, amelyre teljesül az

$$y_j^{[n]}(0) = v_j, \quad 0 \leq j \leq n$$

kezdeti feltétel. Ezt a megoldást a továbbiakban $y^{[n]}(\cdot, v)$ -vel fogjuk jelölni.

3.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek. Ekkor bármely $n \geq 2$ egész, $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$ és $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$ esetén*

$$\|y^{[n]}(t, u) - y^{[n]}(t, v)\| \leq \|u - v\| e^{\rho t}, \quad t \geq 0, \quad (3.21)$$

ahol

$$\rho = \max \{ \mu(A) + L + K, 0 \}. \quad (3.22)$$

Speciálisan

$$\|y_0^{[n]}(t, u) - y_0^{[n]}(t, v)\| \leq \|u - v\| e^{\rho t}, \quad t \geq 0. \quad (3.23)$$

Bizonyítás. Bármely $n \geq 2$ egész esetén legyen

$$z^{[n]}(t) = y^{[n]}(\cdot, u) - y^{[n]}(\cdot, v),$$

azaz

$$z_j^{[n]}(t) = y_j^{[n]}(t, u) - y_j^{[n]}(t, v), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (3.24)$$

A (2.12) egyenletrendszerből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$\left(z_0^{[n]}\right)'(t) = Az_0^{[n]}(t) + b_0(t), \quad (3.25)$$

és

$$\left(z_j^{[n]}\right)'(t) = -\frac{n}{\tau}z_j^{[n]}(t) + b_j(t), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.26)$$

ahol

$$\begin{aligned} b_0(t) &= f\left(y_0^{[n]}(t, u)\right) - f\left(y_0^{[n]}(t, v)\right) + \frac{n}{\tau}z_n^{[n]}(t), \\ b_1(t) &= g\left(y_0^{[n]}(t, u)\right) - g\left(y_0^{[n]}(t, v)\right), \\ b_j(t) &= \frac{n}{\tau}z_{j-1}^{[n]}(t), \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A (2.3) és (2.4) feltételek felhasználásával kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \|b_0(t)\| &\leq L\|z_0^{[n]}(t)\| + \frac{n}{\tau}\|z_n^{[n]}(t)\|, \\ \|b_1(t)\| &\leq K\|z_0^{[n]}(t)\|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ezért a 3.2. Lemma szerint minden $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt}\|z_0^{[n]}\|(t) &\leq (\mu(A) + L)\|z_0^{[n]}(t)\| + \frac{n}{\tau}\|z_n^{[n]}(t)\|, \\ \frac{d^+}{dt}\|z_1^{[n]}\|(t) &\leq \mu\left(-\frac{n}{\tau}E\right)\|z_1^{[n]}(t)\| + K\|z_0^{[n]}(t)\|, \\ \frac{d^+}{dt}\|z_j^{[n]}\|(t) &\leq \mu\left(-\frac{n}{\tau}E\right)\|z_j^{[n]}(t)\| + \frac{n}{\tau}\|z_{j-1}^{[n]}(t)\|, \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Minden $n \geq 2$ egész és $t \geq 0$ esetén legyen

$$\eta^{[n]}(t) = \left(\|z_0^{[n]}(t)\|, \|z_1^{[n]}(t)\|, \dots, \|z_n^{[n]}(t)\|\right)^T. \quad (3.30)$$

A Lozinszkij-mérték definíciója alapján könnyű belátni, hogy

$$\mu\left(-\frac{n}{\tau}E\right) = -\frac{n}{\tau}, \quad n \geq 1.$$

Ezért a (3.29) egyenlőtlenség-rendszerből azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^+}{dt}\eta^{[n]}(t) \leq \tilde{M}\eta^{[n]}(t), \quad t \geq 0, \quad (3.31)$$

ahol \tilde{M} az alábbi $(n+1) \times (n+1)$ típusú mátrix

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \mu(A) + L & 0 & \dots & 0 & \frac{n}{\tau} \\ K & -\frac{n}{\tau} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n}{\tau} & -\frac{n}{\tau} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n}{\tau} & -\frac{n}{\tau} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Továbbá

$$\eta^{[n]}(0) = (\|u_0 - v_0\|, \|u_1 - v_1\|, \dots, \|u_n - v_n\|)^T.$$

A (3.31) egyenlőtlenség speciális esete a (3.8) egyenlőtlenségnek, ahol $\tilde{N} = 0$ és $\tau = 0$. Mivel az \tilde{M} mátrix lényegében nemnegatív, \tilde{N} pedig nemnegatív, ezért a (3.9) lineáris funkcionálra teljesül a (QM) feltétel. A 3.5. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\eta^{[n]}(t) \leq \xi^{[n]}(t), \quad t \geq 0, \quad (3.33)$$

ahol $\xi^{[n]}$ a

$$\xi' = \tilde{M}\xi \quad (3.34)$$

lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer azon megoldása, amelyre $\xi^{[n]}(0) = \eta^{[n]}(0)$, azaz

$$\xi^{[n]}(t) = e^{\tilde{M}t}\eta^{[n]}(0), \quad t \geq 0.$$

Az $\eta^{[n]}$ és $\xi^{[n]}$ függvények értékei az \mathbb{R}^{n+1} térben vannak, amelyen az ℓ_1 -normát választjuk. A (2.49) egyenlőtlenségből következik, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$\|\xi^{[n]}(t)\| \leq \|e^{\tilde{M}t}\| \|\eta^{[n]}(0)\| \leq e^{\mu(\tilde{M})t} \|\eta^{[n]}(0)\| = e^{\mu(\tilde{M})t} \|u - v\|.$$

Végül az 1. táblázat szerint az \tilde{M} mátrixnak az ℓ_1 -normából származtatott

Lozinszkij-mértékére azt kapjuk, hogy

$$\mu(\tilde{M}) = \max\{\mu(A) + L + K, 0\} = \rho.$$

Tehát

$$\|y^{[n]}(t, u) - y^{[n]}(t, v)\| = \|z^{[n]}(t)\| = \|\eta^{[n]}(t)\| \leq \|\xi^{[n]}(t)\| \leq e^{\rho t} \|u - v\|$$

valahányszor $t \geq 0$. ■

3.4. Az approximációs tételek bizonyítása

Bármely $\phi \in \mathcal{C}$ esetén legyen $u^\phi = (u_0^\phi, \dots, u_n^\phi)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)d}$, ahol

$$u_0^\phi = \phi(0) \quad \text{és} \quad u_j^\phi = \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-(j-1)\frac{\tau}{n}} g(\phi(s)) ds, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.35)$$

Ekkor a 3.3. szakaszban bevezetett jelöléssel a (2.12) – (2.13) kezdetiérték-feladat megoldása $y^{[n]}(\cdot, u^\phi)$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz az alábbi egyszerű lemmára is.

3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesül a (2.4) feltétel. Ekkor bármely $\phi, \psi \in \mathcal{C}$ esetén*

$$\|u^\phi - u^\psi\| \leq (1 + K\tau) \|\phi - \psi\|. \quad (3.36)$$

Megjegyezzük, hogy a (3.20) definíció szerint

$$\|u^\phi - u^\psi\| = \sum_{j=0}^n \|u_j^\phi - u_j^\psi\|.$$

A 3.3. Lemma bizonyítása. A (3.35) definícióból (2.4) felhasználásával

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|u^\phi - u^\psi\| &\leq \|\phi(0) - \psi(0)\| + K \sum_{j=1}^n \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-j\frac{\tau}{n} + \frac{\tau}{n}} \|\phi(s) - \psi(s)\| ds \\ &\leq (1 + K\tau) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|\phi(s) - \psi(s)\| = (1 + K\tau) \|\phi - \psi\| \end{aligned}$$

valahányszor $\phi, \psi \in \mathcal{C}$. ■

Most már bebizonyíthatjuk a 3.1. és 3.2. Tételeket.

A 3.1. Tétel bizonyítása. Legyen $\phi \in \mathcal{C}$ és $T > 0$ rögzített és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Jelöljük \mathcal{D} -vel azon \mathcal{C} -beli ψ függvények halmazát, amelyekre ψ differenciálható $[-\tau, 0]$ -n, a $\psi' : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény Lipschitz-folytonos és eleget tesz a (2.14) feltételnek. Könnyű belátni, hogy \mathcal{D} mindenütt sűrű részhalmaza \mathcal{C} -nek. Ezért az adott $\phi \in \mathcal{C}$ függvényhez létezik $\psi \in \mathcal{D}$ úgy, hogy

$$\|\phi - \psi\| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3\gamma e^{\alpha_* T}}, \frac{\varepsilon}{3(1 + K\tau) e^{\rho T}} \right\}, \quad (3.37)$$

ahol $\alpha_* = \max\{\alpha, 0\}$, α , γ és ρ pedig azok a konstansok, amelyek a (3.4) és (3.21) egyenlőtlenségekben szerepelnek. Bármely $n \geq 2$ és $t \in [0, T]$ esetén

$$\|x^\phi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| = \|x^\phi(t) - x^\psi(t) + x^\psi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\psi) + y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\|,$$

és innen

$$\begin{aligned} \|x^\phi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| &\leq \|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| + \|x^\psi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\psi)\| \\ &\quad + \|y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

A 3.3. Tétel szerint minden $t \in [0, T]$ esetén

$$\|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| \leq \gamma \|\phi - \psi\| e^{\alpha t} \leq \gamma \|\phi - \psi\| e^{\alpha_* T} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.39)$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség (3.37)-ből következik. Mivel ψ olyan függvény, amelyre teljesülnek a 2.1. Tétel feltételei, ezért $y^{[n]}(\cdot, u^\psi) \rightarrow x^\psi$ egyenletesen a $[0, T]$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$. Ezért létezik $n_0 > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$

esetén

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x^\psi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\psi)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.40)$$

A 3.7. Tétel szerint minden $n \geq 2$ és $t \in [0, T]$ esetén

$$\|y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| \leq \|u^\phi - u^\psi\| e^{\rho t} \leq \|u^\phi - u^\psi\| e^{\rho T},$$

és innen a 3.3. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\|y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| \leq \|\phi - \psi\| (1 + K\tau) e^{\rho T} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.41)$$

valahányszor $t \in [0, T]$ és $n \geq 2$, ahol az utolsó egyenlőtlenség (3.37) –ből következik. Végül, a (3.38) egyenlőtlenségből a (3.39), (3.40) és (3.41) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy minden $t \in [0, T]$ és $n \geq n_0$ esetén

$$\|x^\phi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| < \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $y^{[n]}(\cdot, u^\phi) \rightarrow x^\phi$ egyenletesen a $[0, T]$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$. ■

A 3.2. Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy x korlátos a $[0, \infty)$ -n és teljesül a (2.17) feltétel. Legyen $\phi \in \mathcal{C}$ rögzített és $\varepsilon > 0$ adott. Amint azt az előző tétel bizonyításában megjegyeztük $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ mindenütt sűrű, ezért létezik $\psi \in \mathcal{D}$ úgy, hogy

$$\|\phi - \psi\| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3\gamma}, \frac{\varepsilon}{3(1 + K\tau)} \right\}, \quad (3.42)$$

ahol γ a (3.4) egyenlőtlenségben szereplő konstans. Ahogyan azt már korábban megmutattuk, ha teljesül a (2.17) feltétel, akkor a 3.3. Tételben szereplő λ_0 karakterisztikus gyök negatív. Tehát a (3.4) egyenlőtlenségben szereplő α konstans választhatjuk nullának, és ezért

$$\|x^\phi(t) - x^\psi(t)\| \leq \gamma \|\phi - \psi\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.43)$$

valahányszor $t \geq 0$.

Mivel $\psi \in \mathcal{D}$ -re teljesülnek a 2.2. Tétel feltételei, ezért $y^{[n]}(\cdot, u^\psi) \rightarrow x^\psi$

egyenletesen a $[0, \infty)$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$. Tehát létezik $n_0 > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|x^\psi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\psi)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.44)$$

Figyelembe véve, hogy a (2.17) feltétel mellett a (3.21) egyenlőtlenségben szereplő ρ konstans nulla, a 3.7. Tételből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ és $n \geq 2$ esetén

$$\|y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| \leq \|u^\phi - u^\psi\|.$$

Innen a 3.3. Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\|y_0^{[n]}(t, u^\psi) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| \leq \|\phi - \psi\| (1 + K\tau) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.45)$$

valahányszor $t \geq 0$ és $n \geq 2$. Végül a (3.38) egyenlőtlenségből a (3.43), (3.44) és (3.45) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\|x^\phi(t) - y_0^{[n]}(t, u^\phi)\| < \varepsilon$$

valahányszor $t \geq 0$ és $n \geq n_0$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $y^{[n]}(\cdot, u^\phi) \rightarrow x^\phi$ egyenletesen a $[0, \infty)$ intervallumon, amint $n \rightarrow \infty$. ■

3.5. Egyensúlyi helyzetek, stabilitás

Ahhoz, hogy az approximációs tételeinket a teljes $[0, \infty)$ intervallumon való egyenletes közelítésre használjuk a (2.17) feltételen kívül szükség van a késleltetett egyenlet x megoldásának korlátosságára. Ebben a szakaszban elegendő feltételeket adunk arra, hogy a (2.1) késleltetett differenciálegyenlet minden megoldása korlátos legyen $[0, \infty)$ -n.

A 3.4. Tételből tudjuk, hogy a (2.17) feltétel mellett a (2.1) egyenlet minden megoldása globálisan exponenciálisan stabil. Tehát ha tudjuk garantálni, hogy a (2.1) egyenletnek létezik egyensúlyi helyzete, akkor a (2.17) feltétel mellett az egyensúlyi helyzet globálisan exponenciálisan stabil. Speciálisan (2.1) minden megoldása korlátos $[0, \infty)$ -n. A (2.1) egyenlet egyensúlyi helyzetének létezésére

a következő két tételben adunk elegendő feltételt.

3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható, $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ pedig olyan folytonos függvények, amelyekre $f+g$ korlátos. Ekkor a (2.1) egyenletneknek létezik egyensúlyi helyzete.*

Bizonyítás. Mivel $f+g$ korlátos, létezik $M > 0$ konstans úgy, hogy

$$\|f(x) + g(x)\| \leq M, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Legyen

$$h(x) = -A^{-1}(f(x) + g(x)), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.46)$$

Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\|h(x)\| = \|A^{-1}(f(x) + g(x))\| \leq \|A^{-1}\| \|f(x) + g(x)\| \leq \|A^{-1}\| M.$$

Legyen $r = \|A^{-1}\| M$ és $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq r\}$. Nyilvánvaló, hogy a h függvény folytonos és az utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy a $B_r(0)$ zárt gömböt önmagába képezi. A Brouwer-féle fixpont tétel szerint a h függvénynek létezik legalább egy fixpontja, amely éppen a (2.1) egyenlet egyensúlyi helyzete.

■

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertálható és teljesülnek a (2.3) és (2.4) feltételek. Ha*

$$L + K < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

akkor a (2.1) egyenletnek létezik egyensúlyi helyzete.

Bizonyítás. Legyen h a (3.46) képlettel definiált folytonos függvény és

$$r = \frac{\|f(0)\| + \|g(0)\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - (L + K)}.$$

A (2.3) és (2.4) feltételekből következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \leq r$ esetén

$$\begin{aligned} \|h(x)\| &\leq \|A^{-1}\| \|f(x) - f(0) + f(0) + g(x) - g(0) + g(0)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| (L\|x\| + \|f(0)\| + K\|x\| + \|g(0)\|) \\ &\leq \|A^{-1}\| ((L+K)r + \|f(0)\| + \|g(0)\|) = r. \end{aligned}$$

Tehát $h : B_r(0) \rightarrow B_r(0)$, ezért a Brouwer-féle fixpont tétel szerint a h függvénynek létezik fixpontja, amely a (2.1) egyenlet egyensúlyi helyzete. ■

A következő stabilitási kritérium a 3.4., 3.8. és 3.9. Tételek egyenes következménye.

3.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.3), (2.4) és (2.17) feltételek. Ha*

$$f + g \text{ korlátos} \tag{3.47}$$

vagy

$$L + K < \frac{1}{\|A^{-1}\|}, \tag{3.48}$$

akkor a (2.1) egyenletnek létezik egy globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete.

3.1. Megjegyzés. *A (3.47) feltétel általában teljesül a neurális hálózatok modellezésére használt késleltetett differenciálegyenletek esetén, mivel a legtöbb aktiválási függvény korlátos.*

3.2. Megjegyzés. *Az A mátrix invertálhatósága következik a (2.17) feltételből, mivel ekkor az*

$$s(A) \leq \mu(A) < 0$$

egyenlőtlenség folytán 0 nem lehet sajátértéke az A mátrixnak.

3.3. Megjegyzés. *A skaláris ($d = 1$) esetben a (2.17) feltétel mellett $\mu(A) = A < 0$, és ekkor a (2.17) és (3.48) feltétel is az*

$$L + K < -A \tag{3.49}$$

feltételre redukálódik. Tehát a $d = 1$ esetben a (3.49) feltétel mellett a (2.1) egyenletnek létezik egy globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete.

4. Alkalmazások

Ebben a fejezetben különböző konkrét késleltetett differenciálegyenletekre fogjuk alkalmazni a módosított láncmódszert. Az első példánk egy farmakokinetikai modellegyenlet, amely az emberi szervezetbe jutatott propofol megoszlását írja le. A második példa egy neurális hálózatokra vonatkozó modellegyenlet, amelyben két különböző aktiválási függvény esetén fogjuk vizsgálni az approximáció hibáját. A további példákban azt vizsgáljuk, hogy hogyan változik a konvergencia nagyságrendje, ha elhagyjuk a kezdeti függvényre vonatkozó (2.14) kompatibilitási feltételt. A közönséges differenciálegyenlet-rendszert a Matlab programcsomagba beágyazott `ode45` algoritmussal oldottuk meg, amely egy negyed és egy ötöd rendű Runge-Kutta módszert használ és úgy választ lépésközt, hogy a hiba a negyed rendű módszer hibája legyen.

4.1. A propofol megoszlás farmakokinetikai modellje

Jelenleg az egyik leggyakrabban használt intravénás anesztetikum a *propofol*. Az anesztézia irányítását, a narkózis mélységének változtatását elősegítő szerként alkalmazzák általános érzéstelenítés bevezetésére és fenntartására, illetve intenzív ellátásban részesülő, lélegeztetett betegek szedációjára.

A Propofol farmakokinetikai tulajdonsága az *OGYI – T – 7577/01, OGYI – T – 7578/01 – 02* számú forgalombahozatali engedélyében leírtak alapján:

"A propofol 98%-ban plazma protein kötődésű. Intravénás alkalmazás után a propofol farmakokinetikája egy 3-kompartmentes modell segítségével írható le: az igen gyors disztribúciós fázis ($t_{1/2} = 1,8 - 4,1$ perc), gyors β -eliminációs fázis ($t_{1/2} = 34 - 64$ perc) és egy lassúbb γ -eliminációs fázis ($t_{1/2} = 184 - 382$ perc). A γ -eliminációs fázisban a vérszintben a csökkenés lassú, a mély kompartmentből történő alacsony disztribúció miatt. A kezdeti disztribúciós volumen (V) kb. 22 – 76 l, a teljes disztribúciós volumen (Vd_{β}) pedig 387 – 1587 l. A propofol gyorsan ürül ki a szervezetből (teljes kiürülés kb. 2 liter/perc).

Főleg a májban metabolizálódik, a propofol inaktív glukuronid konjugátumai (40%) és a megfelelő kinol, valamint a 4-szulfát konjugátum a vizelettel ürülnek ki (kb. 88%). A bevitt adagnak kevesebb, mint 0,3%-a ürül ki változatlan formában

a vizelettel.

Biohasznosulása iv. alkalmazás esetén: 100%." [46]

"A propofol három-kompartmentes farmakokinetikájáról (disztribúció, redisztribúció és elimináció) alapos ismeretek gyűltek össze, így leíró egyenletek segítségével pontosan kiszámítható, hogy egy kívánt plazmakoncentráció eléréséhez mennyi szert kell beadni, és milyen adagolási sebességre van szükség a vérplazmában a célkoncentráció fenntartásához." [7]

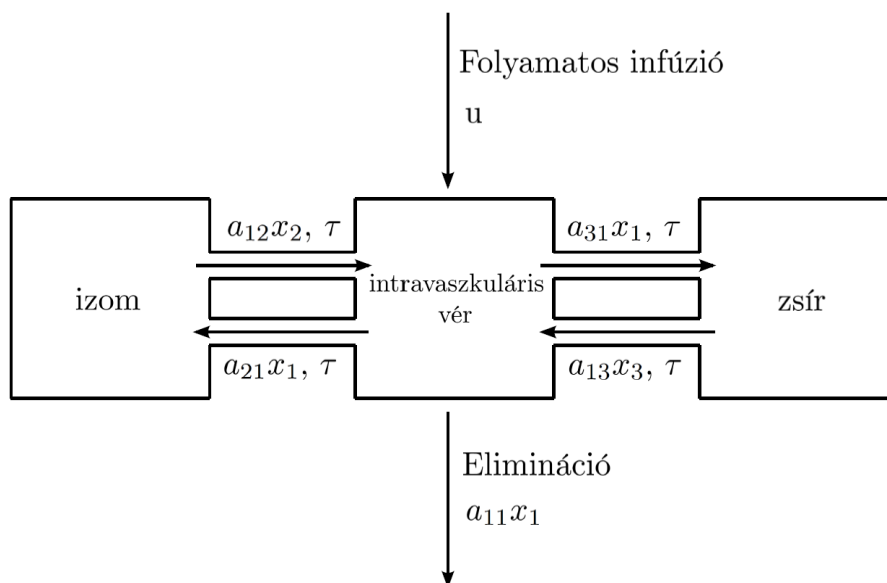
A propofol-áramlást leíró három-kompartmentes modellegyenlet a következőképpen adható meg [9], [30]:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= -(a_{11} + a_{21} + a_{31})x_1(t) + a_{12}x_2(t - \tau) + a_{13}x_3(t - \tau) + u, \\x_2'(t) &= -a_{12}x_2(t) + a_{21}x_1(t - \tau), \\x_3'(t) &= -a_{13}x_3(t) + a_{31}x_1(t - \tau),\end{aligned}\tag{4.1}$$

ahol

- $x_1(t)$ a központi kompartmentben (intravaszkuláris vérben) lévő propofol mennyiségét jelenti (grammban) a t időpillanatban,
- $x_2(t)$ az 1. perifériás kompartmentben (izomban) lévő propofol mennyiségét jelenti (grammban) a t időpillanatban,
- $x_3(t)$ a 2. perifériás kompartmentben (zsírban) lévő propofol mennyiségét jelenti (grammban) a t időpillanatban,
- u a környezetből a központi kompartmentbe jutatott propofol adagolási sebessége (gramm/min) a t időpillanatban,
- $\tau > 0$ a központi kompartment és a perifériás kompartmentek közötti transzferidő.

A propofol áramlási sebességét meghatározó állandók az $a_{1j}, a_{j1} > 0, j = 2, 3$ a gyógyszeráramlási konstansok (min^{-1}), $a_{11} > 0$ pedig a központi kompartmentből kikerülő (lebomló, átalakuló) propofol mennyiségét jelenti (min^{-1}) (2. ábra). Az egyenletrendszer megoldásával megkaphatjuk az egyes kompartmenteken belüli propofol mennyiség időbeli változását.



2. ábra. A propofolmegoszlás három-kompartmentes farmakokinetikai modellje

A (4.1) egyenletrendszer felírható az

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + U \quad (4.2)$$

alakban, ahol $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $U = (u, 0, 0)^T$ és az együttható mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} -(a_{11} + a_{21} + a_{31}) & 0 & 0 \\ 0 & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{13} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

és

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

A (4.1) egyenletben a paraméterek értékeit a következőképpen választjuk meg

(lásd [20]):

a_{11} (min^{-1})	a_{21} (min^{-1})	a_{12} (min^{-1})	a_{31} (min^{-1})	a_{13} (min^{-1})
0.152	0.207	0.092	0.040	0.0048

Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} -0.399 & 0 & 0 \\ 0 & -0.092 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0048 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0.092 & 0.0048 \\ 0.207 & 0 & 0 \\ 0.040 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A propofol kívánt plazmakoncentrációja $2.65-6 \mu\text{g}/\text{ml}$ közötti érték. Az infúzió sebességét a szedálás kívánt mélysége szerint kell beállítani. A célkoncentráció eléréséhez - folyamatos infúzióval - egy $70-80 \text{ kg}$ tömegű felnőttnek a javasolt adagolási sebesség $0.06 \text{ g}/\text{min}$. Tehát

$$U = (0.06, 0, 0)^T.$$

A transzferidő $\tau = 1$ (min). Tekintsük a

$$\phi(t) \equiv (0, 0, 0)^T, \quad t \in [-1, 0] \quad (4.5)$$

kezdeti függvényt. A $[0, 3]$ intervallumon a (4.2) – (4.5) kezdetiérték-feladat pontos megoldását a lépések módszerével határoztuk meg.

A (4.2) egyenletet approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer az

$$\begin{aligned} y_0' &= Ay_0 + ny_n + U, \\ y_1' &= By_0 - ny_1, \\ y_j' &= ny_{j-1} - ny_j, \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tetszőleges $t \geq 0$ és $n \geq 2$ esetén legyen $y^{[n]} = \left(y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]} \right)^T$ a (4.6) egyen-

letrendszer azon megoldása, amelyre

$$\begin{aligned} y_0^{[n]}(0) &= (0, 0, 0)^T, \\ y_j^{[n]}(0) &= B \int_{-j\frac{\pi}{n}}^{-(j-1)\frac{\pi}{n}} \phi(s) ds = (0, 0, 0)^T, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

A (4.2) egyenlet megoldását a (4.6) közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásának $y_0^{[n]} = (y_{01}^{[n]}, y_{02}^{[n]}, y_{03}^{[n]})^T$ komponensével közelítjük, azaz tetszőleges $n \geq 2$ esetén

- $y_{01}^{[n]}(t)$ a központi kompartmentben (intravaszkuláris vérben) lévő propofol mennyiségének a közelítő értékét jelenti (grammban) a t időpillanatban,
- $y_{02}^{[n]}(t)$ az 1. perifériás kompartmentben (izomban) lévő propofol mennyiségének a közelítő értékét jelenti (grammban) a t időpillanatban,
- $y_{03}^{[n]}(t)$ a 2. perifériás kompartmentben (zsírban) lévő propofol mennyiségének a közelítő értékét jelenti (grammban) a t időpillanatban.

A módosított láncmódszer approximációs hibáját három különböző n értékre vizsgáltuk a $[0, 3]$ intervallumon. A numerikus eredményeket a 2 – 10. táblázatokban ismertetjük. Az approximáció hibája alatt minden esetben az $x_i(t) - y_{0i}^{[n]}(t)$, $i = 1, 2, 3$ különbséget értjük. Annak ellenére, hogy a (4.5) kezdeti függvény első koordinátáfüggvényére nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel, úgy tűnik, hogy a konvergencia nagyságrendje nem csökken. A propofolmegoszlás közelítő értékeit $n = 3$ esetén a 3. ábra mutatja.

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.02720588499636	0.02719696106823	+8.9239e - 006
1.0000	0.04948312823748	0.04947546535493	+7.6623e - 006
1.5000	0.06773131418512	0.06773037584445	+9.3717e - 007
2.0000	0.08267913725170	0.08271103873002	-3.1900e - 005
2.5000	0.09494750015700	0.09505387774379	-1.0638e - 004
3.0000	0.10510976756149	0.10529656558704	-1.8680e - 004

2. táblázat. A központi kompartment értékeinek approximációja n=3 esetén

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.02720588499636	0.02719695929830	+8.9257e - 006
1.0000	0.04948312823748	0.04947508414431	+8.0442e - 006
1.5000	0.06773131418512	0.06772437982529	+6.9168e - 006
2.0000	0.08267913725170	0.08268123593133	-2.0530e - 006
2.5000	0.09494750015700	0.09497862198090	-3.1122e - 005
3.0000	0.10510976756149	0.10516926216826	-5.9495e - 005

3. táblázat. A központi kompartment értékeinek approximációja n=10 esetén

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.02720588499636	0.02719695927625	-8.9257e - 006
1.0000	0.04948312823748	0.04947507376331	-8.0545e - 006
1.5000	0.06773131418512	0.06772384080922	-7.4734e - 006
2.0000	0.08267913725170	0.08267277842700	+6.3588e - 006
2.5000	0.09494750015700	0.09494337814586	+4.1220e - 006
3.0000	0.10510976756149	0.10510931439745	+4.5316e - 007

4. táblázat. A központi kompartment értékeinek approximációja n=100 esetén

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	0.00004102127395	+4.1021e - 005
1.0000	0.0000000000000000	0.00066277342676	+6.6277e - 004
1.5000	0.00143260381222	0.00271356004539	+1.2810e - 003
2.0000	0.00529282275511	0.00654719990075	+1.2544e - 003
2.5000	0.01102092610080	0.01206296115910	+1.0420e - 003
3.0000	0.01816372444174	0.01897414145241	+8.1042e - 004

5. táblázat. Az 1. perifériás kompartment értékeinek approximációja n=3 esetén

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	0.00000158845869	+1.5885e - 006
1.0000	0.0000000000000000	0.00024256509639	+2.4257e - 004
1.5000	0.00143260381222	0.00190099675566	+4.6839e - 004
2.0000	0.00529282275511	0.00567772689623	+3.8490e - 004
2.5000	0.01102092610080	0.01131343127273	+2.9251e - 004
3.0000	0.01816372444174	0.01838204788166	+2.1832e - 004

6. táblázat. Az 1. perifériás kompartment értékeinek approximációja n=10 esetén

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	-0.0000000932212	+9.3221e - 008
1.0000	0.0000000000000000	0.00002869920699	-2.8699e - 005
1.5000	0.00143260381222	0.00148033797689	-4.7734e - 005
2.0000	0.00529282275511	0.00532877291484	-3.5950e - 005
2.5000	0.01102092610080	0.01104720361829	-2.6278e - 005
3.0000	0.01816372444174	0.01818215517206	-1.8431e - 005

7. táblázat. Az 1. perifériás kompartment értékeinek approximációja n=100 esetén

t	$x_3(t)$	$y_{03}^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	0.00000799101406	$-7.9910e - 006$
1.0000	0.0000000000000000	0.00013035694450	$-1.3036e - 004$
1.5000	0.00034270435374	0.00053964500588	$-1.9694e - 004$
2.0000	0.00111530532544	0.00131812554523	$-2.0282e - 004$
2.5000	0.00228948936046	0.00246106868688	$-1.7158e - 004$
3.0000	0.00379132863517	0.00392598468426	$-1.3466e - 004$

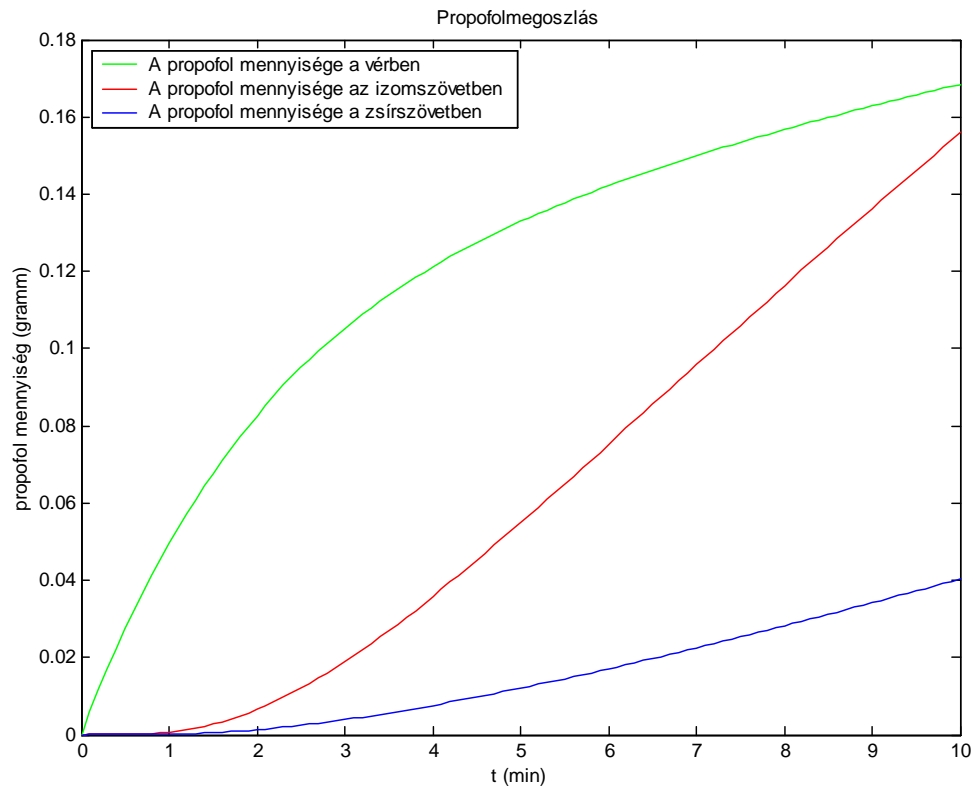
8. táblázat. A 2. perifériás kompartment értékeinek approximációja $n=3$ esetén

t	$x_3(t)$	$y_{03}^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	0.00000030831697	$-3.0832e - 007$
1.0000	0.0000000000000000	0.00004742312508	$-4.7423e - 005$
1.5000	0.00034270435374	0.00037549326430	$-3.3339e - 005$
2.0000	0.00111530532544	0.00113571780202	$-2.0863e - 005$
2.5000	0.00228948936046	0.00229500010689	$-5.8795e - 006$
3.0000	0.00379132863517	0.00378473993362	$+6.5887e - 006$

9. táblázat. A 2. perifériás kompartment értékeinek approximációja $n=10$ esetén

t	$x_3(t)$	$y_{03}^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.5000	0.0000000000000000	-0.0000000180066	$+1.8007e - 008$
1.0000	0.0000000000000000	0.00000556973008	$-5.5697e - 006$
1.5000	0.00034270435374	0.00029061248035	$+5.1542e - 005$
2.0000	0.00111530532544	0.00106142354196	$+5.3432e - 005$
2.5000	0.00228948936046	0.00223412992771	$+5.4991e - 005$
3.0000	0.00379132863517	0.00373476621065	$+5.6260e - 005$

10. táblázat. A 2. perifériás kompartment értékeinek approximációja $n=100$ esetén



3. ábra. A propofolmegoszlás közelítő értékei $n = 3$ esetén

4.2. Védett tengeri területek halpopulációjának modellje

Tekintsünk két tengeri élőhelyet, amelyek között a halállomány szabadon mozog. Halászat csak az egyik területen engedélyezett (nem védett terület), míg a másik területet védett tengeri területnek tekintjük, ahol nincs halászat. A két terület közötti ökológiai kapcsolatot az alábbi késleltetett differenciálegyenlet-rendszerrel írhatjuk le (lásd [5, 10, 33]):

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -(m_1 + d_1)x_1(t) + d_2x_2(t) + \gamma_1x_1(t - \tau)e^{-\alpha_1x_1(t-\tau)}, \\ x_2'(t) &= -(m_2 + d_2 + h)x_2(t) + d_1x_1(t) + \gamma_2x_2(t - \tau)e^{-\alpha_2x_2(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ahol

- $x_1(t)$ a védett tengeri terület halpopulációjának mérete a t időpillanatban,
- $x_2(t)$ a nem védett tengeri terület halpopulációjának mérete a t időpillanatban,
- $m_1 > 0$ a természetes halálozási arány a védett tengeri területen,
- $m_2 > 0$ a természetes halálozási arány a nem védett tengeri területen,
- $d_1 > 0$ az elvándorlási arány a védett tengeri területen,
- $d_2 > 0$ az elvándorlási arány a nem védett tengeri területen,
- $\gamma_1, \alpha_1 > 0$ a születési arányt befolyásoló konstansok a védett területen,
- $\gamma_2, \alpha_2 > 0$ a születési arányt befolyásoló konstansok a nem védett területen,
- $\tau > 0$ az ivaréretté váláshoz szükséges idő.

A (4.7) egyenletrendszer felírható az

$$x'(t) = Ax + f(x(t - \tau)), \quad t > 0$$

alakban, ahol $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} -(m_1 + d_1) & d_2 \\ d_1 & -(m_2 + d_2 + h) \end{pmatrix},$$

az $f = (f_1, f_2)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény koordinátafüggvényei pedig

$$f_i(x_1, x_2) = \gamma_i x_i \exp(-\alpha_i x_i), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2.$$

A paraméterek értékeit a következőképpen választjuk meg (lásd [5, 10]):

m_1	m_2	d_1	d_2	h	γ_1	γ_2	α_1	α_2
0.2	0.5	1	1	0.7	14	7	0.16	0.9

Legyen $\tau = 1$ és tekintsük a (4.7) egyenlet

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= 0, & t \in [-1, 0], \\ \phi_2(t) &= 2, & t \in [-1, 0]\end{aligned}$$

kezdeti függvényekhez tartozó megoldását. Ekkor a (4.7) egyenlethez az

$$\begin{aligned}y_0' &= Ay_0 + ny_n, \\ y_1' &= f(y_0) - ny_1, \\ y_j' &= ny_{j-1} - ny_j, \quad 2 \leq j \leq n.\end{aligned}\tag{4.8}$$

approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszert írhatjuk fel. Minden $n \geq 2$ esetén legyen $y^{[n]} = (y_0^{[n]}, y_1^{[n]}, \dots, y_n^{[n]})^T$ a (4.8) egyenletrendszer azon megoldása, amelyre

$$\begin{aligned}y_0^{[n]}(0) &= (0, 2)^T, \\ y_j^{[n]}(0) &= \int_{-j\frac{\tau}{n}}^{-(j-1)\frac{\tau}{n}} f(\phi(s)) ds = \left(0, \frac{14e^{-1.8}}{n}\right)^T, \quad 1 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

A (4.7) egyenlet megoldását a (4.8) közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásának $y_0^{[n]} = (y_{01}^{[n]}, y_{02}^{[n]})^T$ komponensével közelítjük, azaz tetszőleges $n \geq 2$ esetén

- $y_{01}^{[n]}(t)$ a védett tengeri terület halpopulációja méretének közelítő értéke a t időpillanatban,
- $y_{02}^{[n]}(t)$ a nem védett tengeri terület halpopulációja méretének közelítő értéke a t időpillanatban.

A (4.7) egyenlet $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ kezdeti függvényhez tartozó pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az $x = (x_1, x_2)^T$ függvény, ahol

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \left(0.5 - \sqrt{1.25}\right) + \frac{350e^{-1.8}}{41}, \\ x_2(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \left(\sqrt{1.25} - 0.5\right) + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{420e^{-1.8}}{41}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.7 + \sqrt{1.25}, \\ \lambda_2 &= -1.7 - \sqrt{1.25}, \\ c_1 &= \left(\sqrt{1.25} - 0.5\right) \frac{82 + e^{-1.8} [350(\sqrt{1.25} - 0.5) - 420]}{41 [1 + (\sqrt{1.25} - 0.5)^2]} - \frac{350e^{-1.8}}{41}, \\ c_2 &= \frac{82 + e^{-1.8} [350(\sqrt{1.25} - 0.5) - 420]}{41 [1 + (\sqrt{1.25} - 0.5)^2]}. \end{aligned}$$

A módosított láncmódszer approximációs hibáját három különböző n értékre vizsgáltuk a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel

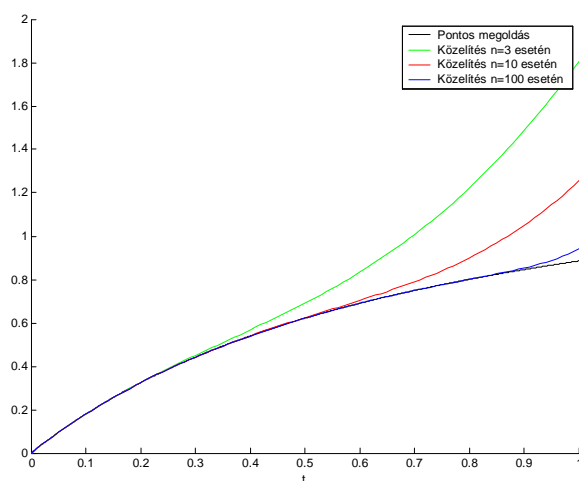
$$(0, 0)^T = \phi'(0-) \neq A\phi(0) + f(\phi(-1)) = \left(0, \frac{14e^{-1.8}}{n}\right)^T,$$

ezért ϕ nem tesz eleget a (2.14) feltételnek. A 11–16. táblázatokból kiolvashatjuk, hogy n értékének növelésével egyre jobb közelítő értékeket kapunk. A numerikus eredmények alapján a konvergencia lineárisnak tűnik. A pontos megoldás x_1 és a közelítő megoldás $y_{01}^{[n]}$ komponensének grafikonjait a 4. ábrán, a pontos megoldás x_2 és a közelítő megoldás $y_{02}^{[n]}$ komponensének grafikonjait pedig az 5. ábrán láthatjuk.

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.000000000000000	0.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.32429011546404	0.32556694295077	$-1.2768e - 003$
0.4000	0.54001230025821	0.56790028812181	$-2.7888e - 002$
0.6000	0.69053995028111	0.83412075849083	$-1.4358e - 001$
0.8000	0.80091288768423	1.22180217022776	$-4.2089e - 001$
1.0000	0.88571767908525	1.80781326263590	$-9.2210e - 001$

11. táblázat. A védett terület értékeinek approximációja $n=3$ esetén

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.000000000000000	0.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.32429011546404	0.32425168318064	$+3.8432e - 005$
0.4000	0.54001230025821	0.54040927401344	$-3.9697e - 004$
0.6000	0.69053995028111	0.70340029071032	$-1.2860e - 002$
0.8000	0.80091288768423	0.89930109130627	$-9.8388e - 002$
1.0000	0.88571767908525	1.25537736161561	$-3.6966e - 001$

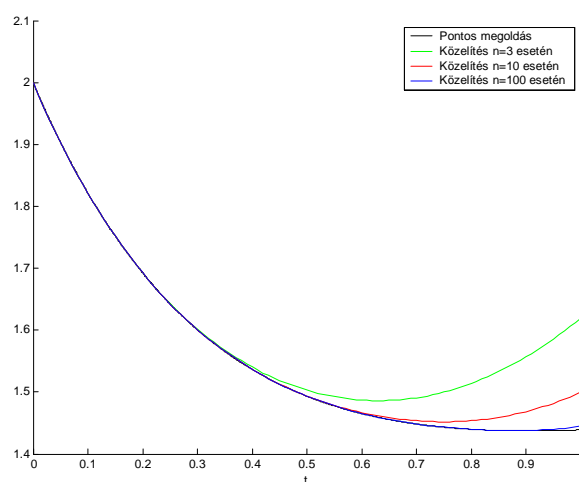
12. táblázat. A védett terület értékeinek approximációja $n=10$ esetén

4. ábra

t	$x_1(t)$	$y_{01}^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.32429011546404	0.32425118535907	+3.8930e-005
0.4000	0.54001230025821	0.53997244059678	+3.9860e-005
0.6000	0.69053995028111	0.69049846686861	+4.1483e-005
0.8000	0.80091288768423	0.80122780681759	-3.1492e-004
1.0000	0.88571767908525	0.94072957712503	-5.5012e-002

13. táblázat. A védett terület értékeinek approximációja $n=100$ esetén

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	+0.0000
0.2000	1.69253404868515	1.69264609934862	-1.1205e-004
0.4000	1.53679825204874	1.54028316379743	-3.4849e-003
0.6000	1.46530946214877	1.48708336154869	-2.1774e-002
0.8000	1.43988611410362	1.51382036402361	-7.3934e-002
1.0000	1.43900396210468	1.62020186541976	-1.8120e-001

14. táblázat. A nem védett terület értékeinek approximációja $n=3$ esetén

5. ábra

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	+0.0000
0.2000	1.69253404868515	1.69251758076261	+1.6468e - 005
0.4000	1.53679825204874	1.53682284754831	-2.4595e - 005
0.6000	1.46530946214877	1.46683162775255	-1.5222e - 003
0.8000	1.43988611410362	1.45376438934886	-1.3878e - 002
1.0000	1.43900396210468	1.49995375053480	-6.0950e - 002

15. táblázat. A nem védett terület értékeinek approximációja n=10 esetén

t	$x_2(t)$	$y_{02}^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	+0.0000
0.2000	1.69253404868515	1.69251754826857	+1.6500e - 005
0.4000	1.53679825204874	1.53677902328375	+1.9229e - 005
0.6000	1.46530946214877	1.46528910009165	+2.0362e - 005
0.8000	1.43988611410362	1.43989731775439	-1.1204e - 005
1.0000	1.43900396210468	1.44496914235505	-5.9652e - 003

16. táblázat. A nem védett terület értékeinek approximációja n=100 esetén

4.3. Késleltetett neurális hálózatok modellegyenlete

A biológiai, "természetes" neurális hálózatok nagyszámú, hasonló vagy azonos felépítésű, egymással összeköttetésben lévő építőelemekből, idegsejtekből felépülő hálózatok, amelyek a legkülönbözőbb feladatok ellátására bizonyulnak alkalmasnak. Az idegrendszer tanulmányozása indította el azt a gondolkodást, hogy kísérjünk meg az élő szervezetekben létező, bonyolult rendszerek mintájára létrehozni számítógépes rendszereket. Az agy - ezen belül az agyi neuronok - felépítését, működését alapul véve, a műszaki kutatások eredményeképpen alkották meg az első mesterséges neuronokat. A neurális hálózatok számítási feladatok megoldására létrejött párhuzamos feldolgozást végző, hardver vagy szoftver megvalósítású adaptív eszközök. Azonos, vagy hasonló típusú – általában nagyszámú – lokális feldolgozást végző műveleti elem, neuron (processing element, neuron) nagymérték-

ben összekapcsolt rendszeréből áll, többnyire rendezett topológiájú. Egy neuron (processing element) egy több-bemenetű, egy-kimenetű eszköz, amely a bemenetek és a kimenet között általában valamilyen nemlineáris leképezést valósít meg, rendelkezhet helyi memóriával is, amelyben bemeneti vagy kimeneti értékeket illetve a működés előéletére vonatkozó adatokat tárolhat. A bemeneti- vagy a bemeneti- és a tárolt értékekből az aktuális kimeneti értéket egy tipikusan nemlineáris függvény alkalmazásával hozza létre, melyet aktiváló vagy aktiválási függvénynek nevezünk (activation function). A neurális hálózatok rendelkeznek tanulási algoritmussal (learning algorithm) és a megtanult információ felhasználását lehetővé tevő előhívási algoritmussal (recall algorithm) [1].

Tekintsünk egy folytonos idejű, d összekötött cellából álló neurális hálózatot, amelyet az

$$x'_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + \sum_{j=1}^d \beta_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^d \gamma_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + I_i, \quad (4.9)$$

késleltetett differenciálegyenlet-rendszerrel adhatunk meg. A (4.9) egyenletben $x_i(t)$ az i -edik cella potenciálja a t időpillanatban, $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemlineáris kimeneti (aktiválási) függvény, amely tipikusan küszöbfüggvény jellegű leképezés, értelmezési tartománya általában a valós számok halmaza, értékészlete pedig a valós számok halmazának egy korlátos részhalmaza, $\alpha_i > 0$ állandó, amely a magára hagyott neuron potenciáljának jellemzője, $\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ a j -edik és i -edik cella közötti kapcsolat erősségét meghatározó súlytényezők a t időpillanatban, $I_i \in \mathbb{R}$ az i -edik cella külső bemenete (eltolási áram) és $\tau_{ij} \geq 0$ a j -edik és i -edik cella közötti jelátviteli idő [8]. A következő két példában két különböző tipikus aktiválási függvénnyel leírt modellegyenlet megoldását approximáljuk a módosított láncmódszerrel. Legyen $\tau = \max_{1 \leq i, j \leq d} \{\tau_{ij}\}$. Ekkor bármely $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)^T : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos kezdeti függvény esetén a (4.9) egyenletnek létezik egyértelmű x megoldása, amelyre

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (4.10)$$

A következő két példában a (4.9) egyenlet speciális skaláris esetét fogjuk vizsgálni előbb az

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

majd az

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

aktiválási függvénnyel.

1. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + \operatorname{arctg}(x(t-1)), \\ \phi(t) &= 1, \quad t \in [-1, 0] \end{aligned} \tag{4.11}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = \frac{1}{8e^{2t}} (\pi e^{2t} - \pi + 8).$$

függvény. Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned} y'_0 &= -2y_0 + ny_n, \\ y'_1 &= \operatorname{arctg}(y_0) - ny_1, \\ y'_j &= ny_{j-1} - ny_j, \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

és a kezdeti feltételek

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 1, \\ y_j(0) &= \frac{\pi}{4n}, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

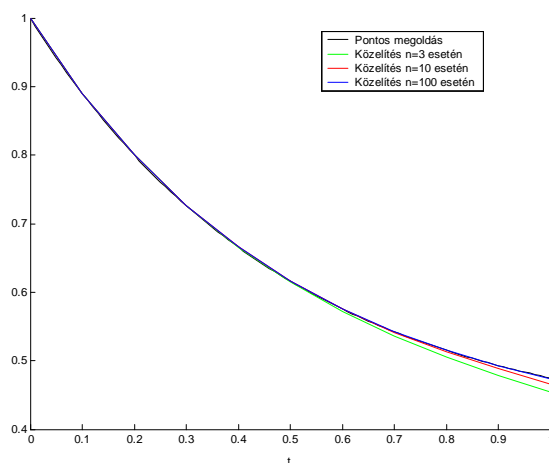
A módosított láncmódszer approximációs hibáját három különböző n értékre vizsgáltuk a $[0, 1]$ intervallumon. A numerikus eredményeket a 17–19. táblázatokban ismertetjük. Az approximáció hibája alatt minden esetben az $x(t) - y_0^{[n]}(t)$ különbséget értjük. A táblázatokból kiolvasható, hogy n értékének növelésével egyre jobb közelítő értékeket kapunk. Annak ellenére, hogy a kezdeti függvényre nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel, úgy tűnik, hogy a konvergencia nagyságrendje nem csökken. A pontos megoldás és a közelítő megoldások grafikonjait a 6. ábrán láthatjuk.

t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79978506121192	0.79975559753646	+2.9464e-005
0.4000	0.66557697422647	0.66493472567314	+6.4225e-004
0.6000	0.57561460318003	0.57229001335176	+3.3246e-003
0.8000	0.51531102247871	0.505711178126246	+9.5992e-003
1.0000	0.47488832348688	0.45468789152055	+2.0200e-002

17. táblázat. Approximáció n=3 esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79978506121192	0.79978506289104	-1.6791e-009
0.4000	0.66557697422647	0.66556710301522	+9.8712e-006
0.6000	0.57561460318003	0.57531880740915	+2.9580e-004
0.8000	0.51531102247871	0.51302121000681	+2.2898e-003
1.0000	0.47488832348688	0.46621225216014	+8.6761e-003

18. táblázat. Approximáció n=10 esetén



6. ábra.

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79978506121192	0.79978506121378	$-1.8615e - 012$
0.4000	0.66557697422647	0.66557697428129	$-5.4820e - 011$
0.6000	0.57561460318003	0.57561251123785	$+2.0919e - 006$
0.8000	0.51531102247871	0.51530092104408	$+1.0101e - 005$
1.0000	0.47488832348688	0.47363699669392	$+1.2513e - 003$

19. táblázat. Approximáció n=100 esetén

2. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + \frac{1}{1 + e^{-x(t-1)}}, \\ \phi(t) &= 0, \quad t \in [-1, 0] \end{aligned} \tag{4.12}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = 0.25 - 0.25e^{-2.0t}$$

függvény. Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned} y_0' &= -2y_0 + ny_n, \\ y_1' &= \frac{1}{1 + e^{-y_0}} - ny_1, \\ y_j' &= ny_{j-1} - ny_j, \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

és a kezdeti feltételek

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 0, \\ y_j(0) &= \frac{1}{2n}, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

A módosított láncmódszer approximációs hibáját három különböző n értékre vizsgáltuk a $[0, 1]$ intervallumon. A numerikus eredményeket a 20 – 22. táblázatokba foglaltuk. Az approximáció hibája alatt minden esetben az $x(t) - y_0^{[n]}(t)$ különbséget értjük. A táblázatokból kiolvasható, hogy n értékének növelésével egyre jobb közelítő értékeket kapunk. Annak ellenére, hogy a kezdeti függvényre nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel, úgy tűnik, hogy a konvergencia nagyságrendje nem csökken.

t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.08241998849109	0.08242586731751	$-5.8788e - 006$
0.4000	0.13766775897069	0.13779044383446	$-1.2268e - 004$
0.6000	0.17470144702195	0.17531606080042	$-6.1461e - 004$
0.8000	0.19952587050134	0.20124838058580	$-1.7225e - 003$
1.0000	0.21616617919085	0.21969274091991	$-3.5266e - 003$

20. táblázat. Approximáció n=3 esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.08241998849109	0.08242002095297	$-3.2462e - 008$
0.4000	0.13766775897069	0.13766972731912	$-1.9683e - 006$
0.6000	0.17470144702195	0.17475840363327	$-5.6957e - 005$
0.8000	0.19952587050134	0.19995524926622	$-4.2938e - 004$
1.0000	0.21616617919085	0.21774950922361	$-1.5833e - 003$

21. táblázat. Approximáció n=10 esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.08241998849109	0.08241998849275	$-1.6640e - 012$
0.4000	0.13766775897069	0.13766775893211	$+3.8589e - 011$
0.6000	0.17470144702195	0.17470136297142	$+8.4051e - 008$
0.8000	0.19952587050134	0.19952780154549	$-1.9310e - 006$
1.0000	0.21616617919085	0.21641027848961	$-2.4410e - 004$

22. táblázat. Approximáció $n=100$ esetén

4.4. További illusztratív példák

A következő példákban az

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{3}{4}x^2(t-1), \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

skaláris differenciálegyenlet négy különböző ϕ kezdeti függvényhez tartozó megoldását fogjuk approximálni a módosított láncmódszerrel. Az approximáló közönséges differenciálegyenlet-rendszer

$$\begin{aligned} y_0' &= -2y_0 + ny_n, \\ y_1' &= \frac{3}{4}y_0^2 - ny_1, \\ y_j' &= ny_{j-1} - ny_j, \quad 2 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

és a kezdeti feltételek

$$y_0(0) = \phi(0) \quad \text{és} \quad y_j(0) = \frac{3}{4} \int_{-jh}^{-(j-1)h} \phi^2(s) ds, \quad 1 \leq j \leq n.$$

A módosított láncmódszer approximációs hibáját három különböző n értékre vizsgáltuk a $[0, 1]$ intervallumon. A numerikus eredményeket a 23–34. táblázatokban ismertetjük. A hiba alatt minden esetben az $x(t) - y_0^{[n]}(t)$ különbséget értjük.

3. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned}x'(t) &= -2x(t) + \frac{3}{4}x^2(t-1), \\ \phi(t) &= t^3 + t^2, \quad t \in [-1, 0]\end{aligned}\tag{4.14}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = \frac{3}{8}t^6 - \frac{21}{8}t^5 + \frac{141}{16}t^4 - \frac{153}{8}t^3 + \frac{465}{16}t^2 - \frac{465}{16}t + \frac{465}{32} - \frac{465}{32}e^{-2t}$$

függvény. Mivel

$$0 = \phi'(0-) = -2\phi(0) + \frac{3}{4}\phi^2(-1) = 0,$$

ezért ϕ eleget tesz a (2.14) feltételnek. A 23 – 25. táblázatokból kiolvashatjuk, hogy n értékének növelésével egyre jobb közelítő értékeket kapunk. A numerikus eredmények alapján a konvergencia lineárisnak tűnik. A pontos megoldás és a közelítő megoldások grafikonjait az 7. ábrán láthatjuk.

t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	<i>hiba</i>
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.00094583104462	0.00877064769994	$-7.8248e - 003$
0.4000	0.00319449017162	0.01132671695994	$-8.1322e - 003$
0.6000	0.00399760815082	0.01107966785078	$-7.0821e - 003$
0.8000	0.00318522289017	0.00969710036486	$-6.5119e - 003$
1.0000	0.00215916546797	0.00798872545989	$-5.8296e - 003$

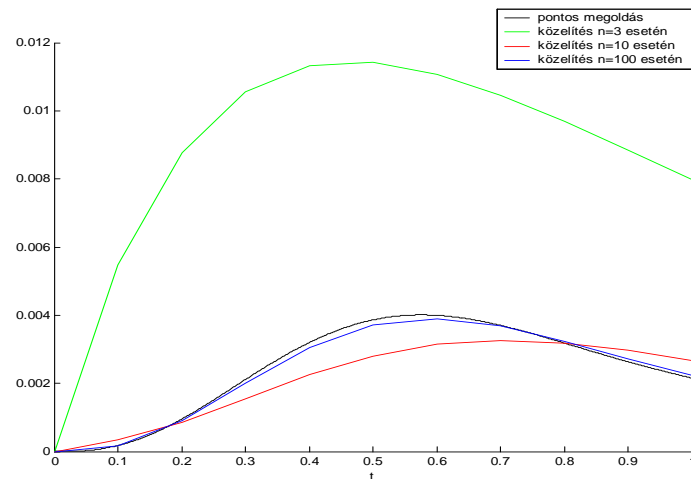
23. táblázat. Approximáció $n=3$ esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.00094583104462	0.00085601086309	+8.9820e - 005
0.4000	0.00319449017162	0.00225249405312	+9.4200e - 004
0.6000	0.00399760815082	0.00314388492101	+8.5372e - 004
0.8000	0.00318522289017	0.00317522366018	+9.9992e - 006
1.0000	0.00215916546797	0.00267357584190	-5.1441e - 004

24. táblázat. Approximáció n=10 esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.00094583104462	0.00089447546655	+5.1356e - 005
0.4000	0.00319449017162	0.00304336972227	+1.5112e - 004
0.6000	0.00399760815082	0.00389781327768	+9.9795e - 005
0.8000	0.00318522289017	0.00322968545966	-4.4463e - 005
1.0000	0.00215916546797	0.00224142395251	-8.2258e - 005

25. táblázat. Approximáció n=100 esetén



7. ábra.

4. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + \frac{3}{4}x^2(t-1), \\ \phi(t) &= 1, \quad t \in [-1, 0] \end{aligned} \tag{4.15}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = \frac{1}{8e^{2t}} (3e^{2t} + 5)$$

függvény. Ekkor

$$\phi'(0-) = 0 \neq -\frac{5}{4} = -2\phi(0) + \frac{3}{4}\phi^2(-1),$$

tehát ϕ -re nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel. Ennek ellenére a 26 – 28. táblázatokból azt olvashatjuk ki, hogy az előző példához képest a konvergencia nagyságrendje nem csökken. A pontos megoldás és a közelítő megoldások grafikonjait a 8. ábrán láthatjuk.

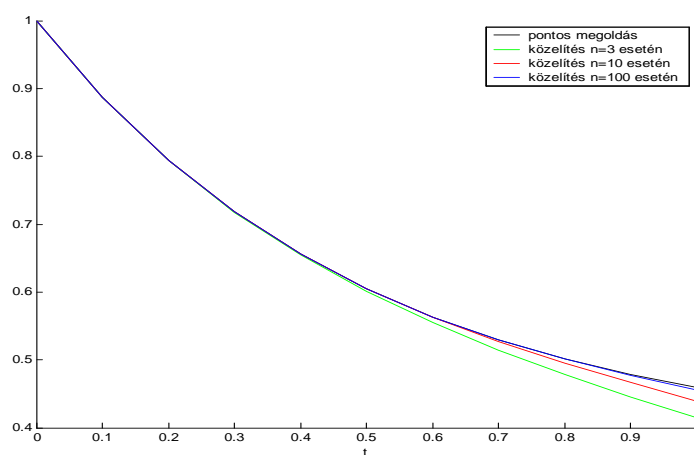
t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	<i>hiba</i>
0.0000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79395002877227	0.79386593751884	+8.4091e – 005
0.4000	0.65583060257326	0.65412774199865	+1.7029e – 003
0.6000	0.56324638244513	0.55500106212771	+8.2453e – 003
0.8000	0.50118532374666	0.47877640461947	+2.2409e – 002
1.0000	0.45958455202288	0.41493674751980	+4.4648e – 002

26. táblázat. Approximáció n=3 esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79395002877227	0.79394991470124	$31.1407e - 007$
0.4000	0.65583060257326	0.65580253748192	$+2.8065e - 005$
0.6000	0.56324638244513	0.56244933210758	$+7.9705e - 004$
0.8000	0.50118532374666	0.49534181115420	$+5.8435e - 003$
1.0000	0.45958455202288	0.43866534371052	$+2.0919e - 002$

27. táblázat. Approximáció $n=10$ esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.79395002877227	0.79395002876873	$+3.5415e - 012$
0.4000	0.65583060257326	0.65583060220420	$+3.6907e - 010$
0.6000	0.56324638244513	0.56324247388207	$+3.9086e - 006$
0.8000	0.50118532374666	0.50115903520518	$+2.6289e - 005$
1.0000	0.45958455202288	0.45611971517048	$+3.4648e - 003$

28. táblázat. Approximáció $n=100$ esetén

8. ábra.

5. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned}x'(t) &= -2x(t) + \frac{3}{4}x^2(t-1), \\ \phi(t) &= \sqrt{1-t}, \quad t \in [-1, 0]\end{aligned}\tag{4.16}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{3}{8}t + \frac{15}{16}$$

függvény. Mivel

$$-\frac{1}{2} = \phi'(0-) = -2\phi(0) + \frac{3}{4}\phi^2(-1) = -\frac{1}{2},$$

ezért ϕ eleget tesz a (2.14) feltételnek. A 29 – 31. táblázatokból kiolvashatjuk, hogy n értékének növelésével egyre jobb közelítő értékeket kapunk. A numerikus eredmények alapján a konvergencia lineárisnak tűnik. A pontos megoldás és a közelítő megoldások grafikonjait a $[0, 1]$ intervallumon a 9. ábrán láthatjuk. A közelítő megoldások alakulását a $[0, 10]$ intervallumon a 10. ábra mutatja. A pontos megoldás kiszámítása hosszabb időintervallumban technikailag nagyon bonyolultá válik, ezért ettől eltekintettünk.

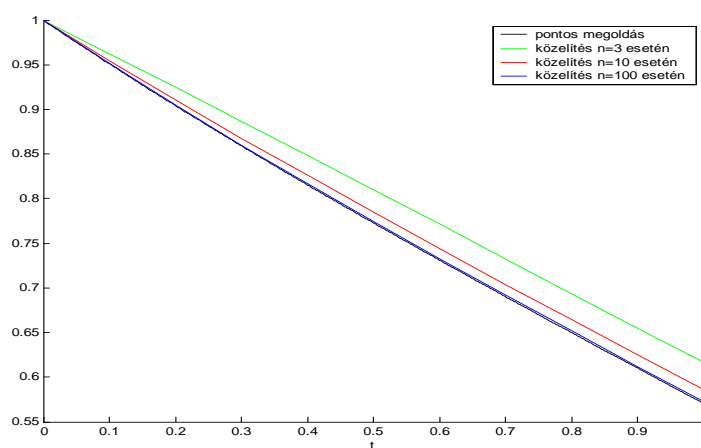
t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	<i>hiba</i>
0.0000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	+0.0000
0.2000	0.90439500287723	0.92486405129135	$-2.0469e - 002$
0.4000	0.81558306025733	0.84870677700565	$-3.3124e - 002$
0.6000	0.73132463824451	0.77119808033583	$-3.9873e - 002$
0.8000	0.65011853237467	0.69332014053790	$-4.3202e - 002$
1.0000	0.57095845520229	0.61668214369775	$-4.5724e - 002$

29. táblázat. Approximáció $n=3$ esetén

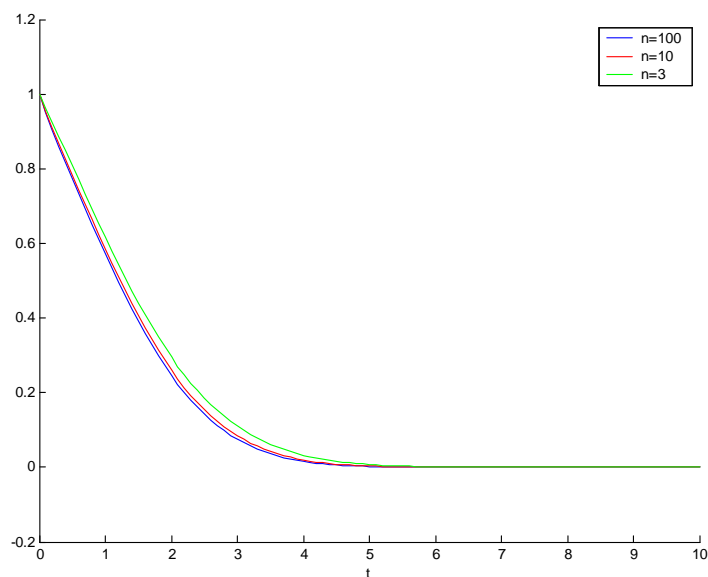
t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.90439500287723	0.91057650343315	$-6.1815e - 003$
0.4000	0.81558306025733	0.82589520506213	$-1.0312e - 002$
0.6000	0.73132463824451	0.74422334803077	$-1.2899e - 002$
0.8000	0.65011853237467	0.66424004501787	$-1.4122e - 002$
1.0000	0.57095845520229	0.58575388244446	$-1.4795e - 002$

30. táblázat. Approximáció $n=10$ esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	1.000000000000000	1.000000000000000	+0.0000
0.2000	0.90439500287723	0.90501315279142	$-6.1815e - 004$
0.4000	0.81558306025733	0.81661556845455	$-1.0325e - 003$
0.6000	0.73132463824451	0.73263769830848	$-1.3131e - 003$
0.8000	0.65011853237467	0.65161330554419	$-1.4948e - 003$
1.0000	0.57095845520229	0.57253212606458	$-1.5737e - 003$

31. táblázat. Approximáció $n=100$ esetén

9. ábra.



10. ábra.

6. Példa.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + \frac{3}{4}x^2(t-1), \\ \phi(t) &= 2\sqrt{1-t}, \quad t \in [-1, 0] \end{aligned} \tag{4.17}$$

kezdetiérték-feladatot, amelynek pontos megoldása a $[0, 1]$ intervallumon az

$$x(t) = \frac{15}{4} - \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}t$$

függvény. Ekkor

$$\phi'(0-) = -1 \neq 2 = -2\phi(0) + \frac{3}{4}\phi^2(-1),$$

tehát ϕ -re nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel. A 32 – 34. táblázatokból kiolvasható, hogy n értékének növelésével jobb közelítő értékeket kapunk. Annak ellenére, hogy a kezdeti függvényre nem teljesül a (2.14) kompatibilitási feltétel a konvergencia nagyságrendje ebben az esetben sem csökken. A pontos megoldás

és a közelítő megoldások grafikonjait a $[0, 1]$ intervallumon a 11. ábra mutatja. A közelítő megoldások alakulását a $[0, 10]$ intervallumon a 12. ábra mutatja. A pontos megoldás kiszámítása hosszabb időintervallumban technikailag nagyon bonyolultá válik, ezért ettől eltekintettünk.

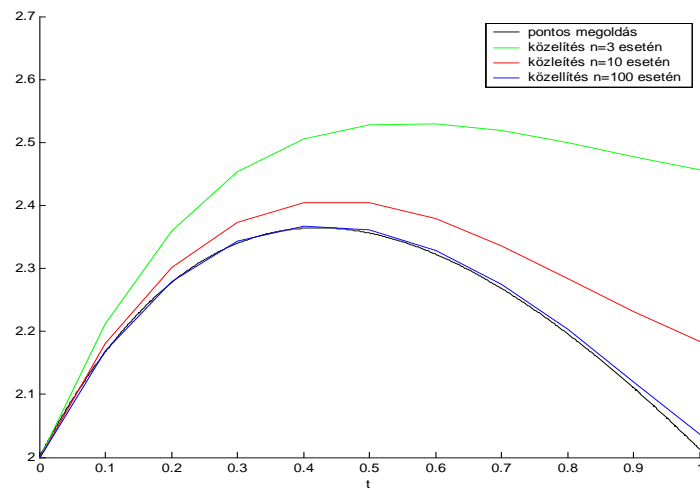
t	$x(t)$	$y_0^{[3]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	+0.0000
0.2000	2.27693991943763	2.35927476960490	$-8.2335e - 002$
0.4000	2.36367431279486	2.50577544299290	$-1.4210e - 001$
0.6000	2.32291012915365	2.52988647684783	$-2.0698e - 001$
0.8000	2.19668109350935	2.49978723105691	$-3.0311e - 001$
1.0000	2.01316325433593	2.45594203513334	$-4.4278e - 001$

32. táblázat. Approximáció $n=3$ esetén

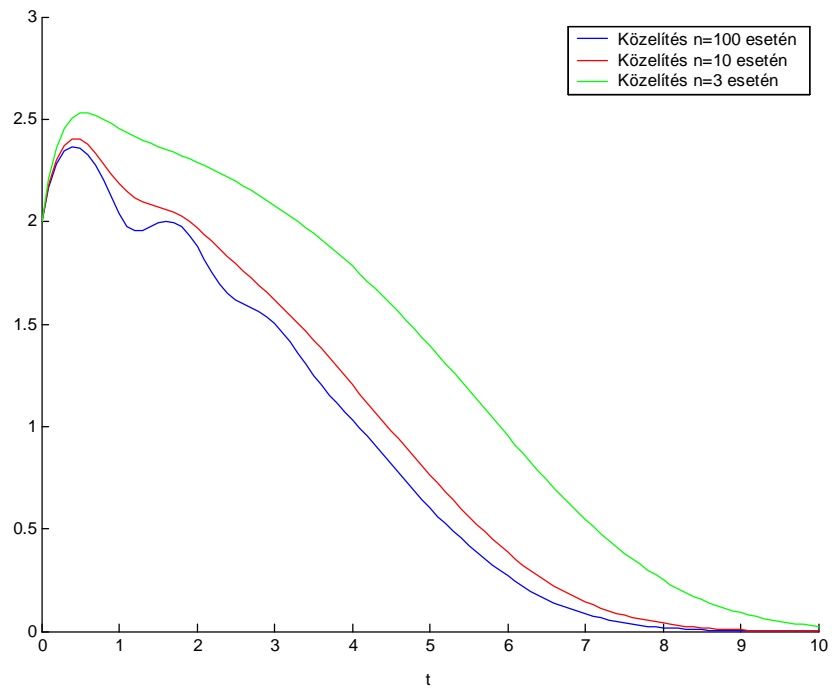
t	$x(t)$	$y_0^{[10]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.0000000000000000	2.0000000000000000	+0.0000
0.2000	2.27693991943763	2.30166606084198	$-2.4726e - 002$
0.4000	2.36367431279486	2.40506643604777	$-4.1392e - 002$
0.6000	2.32291012915365	2.37866380525766	$-5.5754e - 002$
0.8000	2.19668109350935	2.28404147730740	$-8.7360e - 002$
1.0000	2.01316325433593	2.18339918349929	$-1.7024e - 001$

33. táblázat. Approximáció $n=10$ esetén

t	$x(t)$	$y_0^{[100]}(t)$	$hiba$
0.0000	2.000000000000000	2.000000000000000	+0.0000
0.2000	2.27693991943763	2.27941251909318	$-2.4726e - 003$
0.4000	2.36367431279486	2.36780434559223	$-4.1300e - 003$
0.6000	2.32291012915365	2.32814023506233	$-5.2301e - 003$
0.8000	2.19668109350935	2.20277963295798	$-6.0985e - 003$
1.0000	2.01316325433593	2.03690638515367	$-2.3743e - 002$

34. táblázat. Approximáció $n=100$ esetén

11. ábra.



12. ábra.

A. Függelék

Ebben a részben egy új stabilitási kritériumot fogunk bizonyítani a neurális hálózatok modellezésére használt (4.9) késleltetett differenciálegyenletre. A (4.9) egyenletet Mohamad és Gopalsamy [44] tanulmányozta az

$$\alpha_i > 0, \quad I_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (\text{A.1})$$

$$\tau_{ij} \geq 0, \quad \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (\text{A.2})$$

$$|f_i(x)| \leq k_i, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.3})$$

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq K_i |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

feltételek mellett, ahol $k_i, K_i, 1 \leq i \leq d$ pozitív konstansok. Fő eredményük a következő stabilitási kritérium.

A.1. Tétel. [44] *Tegyük fel, hogy teljesülnek az (A.1) – (A.4) feltételek és*

$$\alpha_i > K_i \sum_{j=1}^d (|\beta_{ij}| + |\gamma_{ij}|), \quad 1 \leq i \leq d. \quad (\text{A.5})$$

Ekkor a (4.9) egyenletnek létezik egy globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete.

A következő eredményünk az A.1. Tétel általánosítása.

A.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a A.1. Tétel feltételei kivéve az (A.5) feltételt, amely helyett feltesszük, hogy*

$$(-1)^j \det \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} \\ \vdots & & \\ m_{j1} & & m_{jj} \end{pmatrix} > 0, \quad 1 \leq j \leq d, \quad (\text{A.6})$$

ahol

$$m_{ij} = -\alpha_i \delta_{ij} + K_j (|\beta_{ij}| + |\gamma_{ij}|), \quad 1 \leq i, j \leq d, \quad (\text{A.7})$$

és δ_{ij} a Kronecker-féle delta. Ekkor a (4.9) egyenletnek létezik egy globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete.

Az A.2. Tétel bizonyításához a 3. fejezetben említett összehasonlító elven kívül szükségünk lesz a következő ismert eredményre is.

A.3. Tétel. [48] Tekintsük az

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^d b_{ij} x_j(t - \tau_{ij}), \quad 1 \leq i \leq d \quad (\text{A.8})$$

lineáris késleltetett differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy az $A = (a_{ij})$ mátrix lényegében nemnegatív, a $B = (b_{ij})$ mátrix pedig nemnegatív. Ekkor az (A.8) egyenlet triviális megoldása akkor és csak akkor globálisan exponenciálisan stabil, ha ugyanilyen az

$$x' = (A + B)x \quad (\text{A.9})$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer triviális megoldása. Ez utóbbi feltétel ekvivalens az (A.6) egyenlőtlenségrendszerrel, ahol

$$m_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Az A.2. Tétel bizonyítása. Az adott feltételek mellett a (4.9) egyenletnek létezik egy $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ egyensúlyi helyzete. Mivel ez a [44], Theorem 2.1 bizonyításával megegyező módon látható be, a bizonyítástól eltekintünk. Legyen $\tau = \max_{1 \leq i, j \leq d} \{\tau_{ij}\}$ és $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)^T : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ adott folytonos függvény. Legyen $x = x^\phi$ a (4.9) – (4.10) kezdetiérték-feladat megoldása. Ekkor a 3.2. Lemma szerint minden $1 \leq i \leq d$ és $t \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} |x_i(t) - x_i^*| &\leq -\alpha_i |x_i(t) - x_i^*| + \sum_{j=1}^d |\beta_{ij}| K_j |x_j(t) - x_j^*| \\ &\quad + \sum_{j=1}^d |\gamma_{ij}| K_j |x_j(t - \tau_{ij}) - x_j^*|. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Legyen

$$y_i(t) = |x_i(t) - x_i^*|, \quad t \geq -\tau, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Ekkor (A.10) felírható a

$$\frac{d^+}{dt} y_i(t) \leq -\alpha_i y_i(t) + \sum_{j=1}^d |\beta_{ij}| K_j y_j(t) + \sum_{j=1}^d |\gamma_{ij}| K_j y_j(t - \tau_{ij}) \quad (\text{A.11})$$

alakban. Az (A.11) egyenlőtlenségrendszer a (3.7) egyenlőtlenség speciális esete, ha

$$F_i(\phi) = -\alpha_i \phi_i(0) + \sum_{j=1}^d |\beta_{ij}| K_j \phi_j(0) + \sum_{j=1}^d |\gamma_{ij}| K_j \phi_j(-\tau_{ij}), \quad 1 \leq i \leq d. \quad (\text{A.12})$$

Legyen

$$a_{ij} = -\alpha_i \delta_{ij} + K_j |\beta_{ij}|, \quad 1 \leq i, j \leq d \quad (\text{A.13})$$

és

$$b_{ij} = K_j |\gamma_{ij}|, \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (\text{A.14})$$

Mivel az $A = (a_{ij})$ mátrix lényegében nemnegatív, $B = (b_{ij})$ pedig nemnegatív, ezért az (A.12) funkcionálra teljesül a (QM) feltétel. A 3.5. Tétel szerint

$$0 \leq y(t) \leq z^\psi(t), \quad t \geq -\tau, \quad (\text{A.15})$$

ahol $y(t) = (y_1(t), \dots, y_d(t))^T$, $z^\psi = (z_1^\psi, \dots, z_d^\psi)^T$ pedig a

$$z'_i(t) = -\alpha_i z_i(t) + \sum_{j=1}^d |\beta_{ij}| K_j z_j(t) + \sum_{j=1}^d |\gamma_{ij}| K_j z_j(t - \tau_{ij}), \quad 1 \leq i \leq d \quad (\text{A.16})$$

rendszer

$$\psi(t) = \phi(t) - x^*, \quad t \in [-\tau, 0] \quad (\text{A.17})$$

kezdeti függvényhez tartozó megoldása. Ha teljesül az (A.4) feltétel, akkor az A.3. Tétel szerint az

$$z' = (A + B)z \quad (\text{A.18})$$

egyenlet, és ezért az (A.16) késleltetett egyenlet triviális megoldása is globálisan exponenciálisan stabil. Tehát létezik $L > 0$ és $\eta > 0$ konstans úgy, hogy minden $t \geq 0$ -ra

$$\|z^\psi(t)\| \leq L \|\psi\| e^{-\eta t}, \quad (\text{A.19})$$

ahol $\|\psi\|$ a \mathcal{C} -beli szuprémum-normát jelöli. Mivel (A.19) független az \mathbb{R}^d -n választott normától, választhatjuk a \leq parciális rendezésre nézve monoton ℓ_1 -normát is. Ekkor az (A.15) és (A.19) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy minden $t \geq 0$ -ra

$$\|x^\phi(t) - x^*\| = \|y(t)\| \leq \|z^\psi(t)\| \leq L \|\psi\| e^{-\eta t} = L \|\phi - x^*\| e^{-\eta t}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség azt mutatja, hogy x^* globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete a (4.9) egyenletnek. ■

A.1. Megjegyzés. Az (A.5) feltételből következik, hogy az (A.7)–tel definiált $\bar{M} = (m_{ij})$ mátrixnak az ℓ_∞ normából származtatott Lozinszkij-mértéke negatív (lásd 1. táblázat). Mivel

$$s(\bar{M}) \leq \mu(\bar{M}) < 0,$$

ezért az (A.5) feltétel mellett az \bar{M} mátrix stabil, azaz minden sajátértékének a valós része negatív. Ugyanakkor ismert [6], hogy az (A.6) feltétel szükséges és elegendő feltétele az \bar{M} mátrix stabilitásának. Tehát az (A.6) feltétel általánosabb az (A.5) feltételnél.

A következő példában megmutatjuk, hogy az A.2. Tétel valódi általánosítása az A.1. Tételnek, azaz léteznek olyan $\alpha_i, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ konstansok, amelyek eleget tesznek az (A.6) feltételnek, ugyanakkor (A.5) nem teljesül. Legyen

$$d = 2,$$

$$K_1 = K_2 = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,$$

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{22} = 0, \quad \beta_{21} = 1,$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 0.$$

Ekkor

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$1 = \alpha_2 = K_2 (|\beta_{21}| + |\beta_{22}| + |\gamma_{21}| + |\gamma_{22}|) = 1,$$

ezért az (A.5) feltétel nem teljesül. Ugyanakkor

$$-m_{11} = 1 > 0 \quad \text{és} \quad \det \bar{M} = 1 > 0,$$

tehát az (A.6) feltétel teljesül.

B. Függelék

Az alábbiakban felsoroljuk az approximációs tételeink bizonyításában szereplő fontosabb konstansokat és jelentésüket.

A 2.1. Tétel bizonyításában szereplő konstansok:

- τ : az időbeli késleltetés nagysága
- L : az f függvény Lipschitz-konstansa
- K : a g függvény Lipschitz-konstansa
- H : az x és x' függvények közös Lipschitz-konstansa a $[-\tau, T]$ intervallumon
- $S_1 = \max \{ \|g'(v)\| \mid v \in x([-\tau, T]) \}$
- $S_2 = \max \{ \|x'(t)\| \mid t \in [-\tau, T] \}$
- K^* : a g' függvény Lipschitz-konstansa az $x([-\tau, T]) \subset \mathbb{R}^d$ halmazon
- $M = \max \left\{ KH \frac{\tau}{2}, \frac{\tau^2}{2} H (S_1 + S_2 K^*) \right\}$
- $\kappa = \max \{ e^{\mu(A)t} \mid t \in [-\tau, T] \}$
- $\gamma = \frac{3M\kappa}{\tau} T e^{\kappa(L+K)T}$
- $C = \gamma\tau$

A 2.2. Tétel bizonyításában szereplő konstansok:

- τ : az időbeli késleltetés nagysága
- L : az f függvény Lipschitz-konstansa
- K : a g függvény Lipschitz-konstansa
- $\mu(A)$: az $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrix Lozinszkij-mértéke
- H : az x és x' függvények közös Lipschitz-konstansa a $[-\tau, \infty)$ intervallumon
- $\tilde{S}_1 = \sup \{ \|g'(v)\| \mid v \in x([-\tau, \infty)) \}$

- $\tilde{S}_2 = \sup \{ \|x'(t)\| \mid t \in [-\tau, \infty) \}$
- \tilde{K} : a g' függvény Lipschitz-konstansa az $x([-\tau, \infty)) \subset \mathbb{R}^d$ halmazon
- $M = \max \left\{ KH \frac{\tau}{2}, \frac{\tau^2}{2} H \left(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \tilde{K} \right) \right\}$
- $C = \frac{3M}{-\mu(A)} \left(1 - \frac{L+K}{-\mu(A)} \right)^{-1}$

Összegzés

Tézisek

Az értekezés legfontosabb eredményeit a következő tézisekben foglaljuk össze.

- 1. tézis** A skaláris késleltetett differenciálegyenletekre ismert módosított láncmódszert kiterjesztettem általánosabb késleltetett differenciálegyenlet-rendszerekre, bizonyítottam a módszer konvergenciáját a késleltetett egyenlet elegendően sima kezdeti függvényekhez tartozó megoldásaira, és becslést adtam az approximáció nagyságrendjére is.
 - 1.1. Elegendő feltételt adtam arra, hogy a módosított láncmódszer konvergens legyen bármely véges intervallumon a késleltetett egyenlet elegendően sima kezdeti függvényekhez tartozó megoldásaira és egyúttal becslést adtam az approximáció nagyságrendjére is (lásd 2.1. Tétel).
 - 1.2. Explicit elegendő feltételeket adtam arra, hogy a módosított láncmódszer konvergens legyen a teljes $[0, \infty)$ intervallumon elegendően sima kezdeti függvényekhez tartozó megoldások esetén, és becslést adtam az approximáció nagyságrendjére is (lásd 2.2. Tétel).
- 2. tézis** A fenti eredményeim felhasználásával bebizonyítottam, hogy a módosított láncmódszer konvergens a késleltetett egyenlet bármely folytonos kezdeti függvényhez tartozó megoldása esetén is. Approximációs tételeinket különböző modellegyenletekre is alkalmaztam.
 - 2.1. Elegendő feltételt adtam arra, hogy a módosított láncmódszer konvergens legyen bármely véges intervallumon a késleltetett egyenlet tetszőleges folytonos kezdeti függvényhez tartozó megoldására (lásd 3.1. Tétel).
 - 2.2. Explicit elegendő feltételeket adtam arra, hogy a módosított láncmódszer konvergens legyen a teljes $[0, \infty)$ intervallumon a késleltetett egyenlet tetszőleges folytonos kezdeti függvényhez tartozó megoldására (lásd 3.2. Tétel).

2.3. Approximációs tételeimet egy farmakokinetikai modellegyenletre, egy tengeri halpopuláció modellegyenletére és a neurális hálózatok elméletéből származó modellegyenletre is alkalmaztam.

3. tézis Új elegendő feltételeket adtam a késleltetett egyenlet megoldásainak globális exponenciális stabilitására.

3.1. Elegendő feltételt adtam arra, hogy a késleltetett egyenlet minden megoldása globálisan exponenciálisan stabil legyen (lásd 3.4. Tétel).

3.2. Elegendő feltételt adtam arra, hogy a késleltetett egyenletnek legyen egy globálisan exponenciálisan stabil egyensúlyi helyzete (lásd 3.10. és A.2. Tétel).

Publikációk hivatkozásokkal

(P1) Krasznai, B., Győri, I. and Pituk, M., "The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks.", *Mathematical and Computer Modelling* 51:5-6 (2010), 452-460. (**Impakt faktor = 1.103**)

1. Demidenko, G. V., "Systems of differential equations of higher dimension and delay equations.", *Siberian Mathematical Journal*, 53:6 (2012), 1021-1028.

(P2) Krasznai, B., Győri, I. and Pituk, M., "Positive decreasing solutions of higher-order nonlinear difference equations.", *Advances in Difference Equations*, Article ID: 973432 (2010). (**Impakt faktor = 0.892**)

2. Diblík, J., Hlavičková I., "Asymptotic upper and lower estimates of a class of positive solutions of a discrete linear equation with a single delay.", *Abstract and Applied Analysis*, Article ID: 764351 (2012).

3. Peics, H., "Positive solutions of second-order linear difference equation with variable delays.", *Advances in Difference Equations*, Article ID: 82 (2013).

(P3) Krasznai, B., "Stability criteria for delay differential equations. Recent Advances in Delay Differential and Difference Equations.", *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* 94, Springer, New York, (2014), 161-171. (ISBN: 978-3-319-08250-9)

Nemzetközi konferencia előadások

- (E1) Krasznai, B.: The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks. Workshop of the Committee on Mathematical Analysis and Application of the Hungarian Academy of Sciences, Széchenyi István University, Győr, May 22, 2009.
- (E2) Krasznai, B.: Approximation of delay differential equations by the modified chain method., Workshop on Delay Differential and Difference Equations, Veszprém, July 17-18, 2014.

Hivatkozások

- [1] Altrichter, M., Horváth, G., Pataki, B., Strausz, G., Takács, G., & Valyon, J., "Neurális hálózatok." Panem, Budapest (2006).
- [2] Banks, H. T., "Delay systems in biological models: Approximation techniques." *Nonlinear Systems and Applications* (1977), 21-38.
- [3] Banks, H. T., and Kappel, F., "Spline approximations for functional differential equations." *Journal of Differential Equations* 34:3 (1979), 496-522.
- [4] Bellman, R. E. and Cooke, K. L., "Differential - Difference Equations." Academic Press, New York (1963).
- [5] Berezansky, L., Idels, L. and Kipnis, M., "Mathematical model of marine protected areas." *IMA Journal of Applied Mathematics* 76 (2011), 312-325.
- [6] Berman, A., and Plemmons, R. J., "Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences." Academic Press, New York (1979)
- [7] Bogár, L., "Aneszteziológia és intenzív terápia." Medicina Könyvkiadó, Budapest (2009).
- [8] Cao, J., and Zhou, D., "Stability analysis of delayed cellular neural networks." *Neural Networks* 11:9 (1998), 1601-1605.
- [9] Chellaboina, V. S., et al., "Direct adaptive control of nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay." *Biology and Control Theory: Current Challenges*, Springer, Berlin (2007), 291-316.
- [10] Christou, C. N., Idels, L., "Bioeconomical Ricker's model of marine protected areas." *Electronic Journal of Differential Equations* 2012:76 (2012), 1-11.
- [11] Chua, L. O., and Yang, L., "Cellular neural networks: Applications." *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 35:10 (1988), 1273-1290.
- [12] Coppel, W. A., "Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations." Heath, Boston (1965).

-
- [13] Demidenko, G. V., "Systems of differential equations of higher dimension and delay equations." *Siberian Mathematical Journal* 53:6 (2012), 1021-1028.
- [14] Diekmann, O., van Gils, S. A., Verduyn Lunel, S. M., Walther, H.-O., "Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis." Springer, New York (1995)
- [15] Driver, R. D., "Ordinary and Delay Differential Equations." Springer, New York (1977)
- [16] Erneux, T., "Applied Delay Differential Equations." Springer, New York (2009).
- [17] Frasson, M. V. S., and Verduyn Lunel, S. M., "Large time behaviour of linear functional differential equations." *Integral Equations and Operator Theory* 47:1 (2003), 91-121.
- [18] Gedeon, T., and Hines, G., "Upper semicontinuity of Morse sets of a discretization of a delay-differential equation." *Journal of Differential Equations* 151:1 (1999), 36-78.
- [19] Gedeon, T., and Hines, G., "Upper semicontinuity of Morse sets of a discretization of a delay-differential equation: An improvement." *Journal of Differential Equations* 179:2 (2002), 369-383.
- [20] Glass, P. S., et al., "Accuracy of pharmacokinetic model-driven infusion of propofol." *Anesthesiology* 71:3A (1989), A277.
- [21] Gopalsamy, K., "Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics". Springer, New York (2013).
- [22] Gyóri, I., "Delay differential and integro-differential equations in biological compartment models." *Systems Science* 8:2-3 (1982), 167-187.
- [23] Gyóri, I., "Connections between compartmental systems with pipes and integro-differential equations." *Mathematical Modelling* 7:9 (1986), 1215-1238.

-
- [24] Gyóri, I., "Two approximation techniques for functional differential equations." *Computers & Mathematics with Applications* 16:3 (1988), 195-214.
- [25] Gyóri, I., "Interconnection between ordinary and delay differential equations." *Modern Optimal Control*, in: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, New York (1989), 131-141.
- [26] Gyóri, I., and Eller., J., "Compartmental systems with pipes." *Mathematical Biosciences* 53:3 (1981), 223-247.
- [27] Gyóri, I., and Ladas, G. E., "Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications". Oxford University Press, New York (1991).
- [28] Gyóri, I., and Turi, J., "Uniform approximation of a nonlinear delay equation on infinite intervals." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 17:1 (1991), 21-29.
- [29] Haddad, W. M., and Chellaboina, V., "Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay.", *System and Control Letters* 51 (2004), 355-361
- [30] Haddad, W. M., Chellaboina, V., and Hui, Q., "Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems." Princeton University Press, Princeton (2010).
- [31] Hale, J. K., "Functional Differential Equations." Springer, Berlin (1971).
- [32] Hale, J. K., and Verduyn-Lunel, S. M., "Introduction to Functional Differential Equations." Springer, New York (2013).
- [33] Idels, L., and Kipnis, M., "Stability criteria for a nonlinear nonautonomous system with delays." *Applied Mathematical Modelling* 33:5 (2009), 2293-2297.
- [34] Janushevski, P. T. "Control of Object with Delays." (in Russian) Nauka, Moscow (1978).
- [35] Kanyár, B., Eller, J., and Gyóri, I., "Parameter estimation of the radiocardiogram using compartmental models with pipes", in "Mathematical and Computational Methods in Physiology", *Adv. Physiol. Sci: Vol. 34*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1981), 229-238.

-
- [36] Kelley, W. G., and Peterson, A. C., "The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative." Springer, New York (2010).
- [37] Koch, G., et al., "Multi-response model for rheumatoid arthritis based on delay differential equations in collagen-induced arthritic mice treated with an anti-GM-CSF antibody." *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics* 39:1 (2012), 55-65.
- [38] Koch, G., "Modeling of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics with Application to Cancer and Arthritis." PhD Thesis, Universitat Konstanz, Germany (2012).
- [39] Kolmanovskii, V., and Myshkis, A., "Applied Theory of Functional Differential Equations". Springer, New York (1992).
- [40] Krasznai, B., "Stability criteria for delay differential equations. Recent Advances in Delay Differential and Difference Equations.", *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* 94, Springer, New York, (2014), 161-171.
- [41] Krasznai, B., Györi, I. and Pituk, M., "The modified chain method for a class of delay differential equations arising in neural networks.", *Mathematical and Computer Modelling* 51:5-6 (2010), 452-460.
- [42] Krasznai, B., Györi, I. and Pituk, M., "Positive decreasing solutions of higher-order nonlinear difference equations.", *Advances in Difference Equations*, Article ID: 973432, (2010).
- [43] Kuang, Y., "Delay Differential Equations: with Applications in Population Dynamics". Academic Press, San Diego (1993).
- [44] Mohamad, S., and Gopalsamy, K., "Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays." *Applied Mathematics and Computation* 135:1 (2003), 17-38.
- [45] Ohta, Y., "Qualitative analysis of nonlinear quasi-monotone dynamical systems described by functional-differential equations." *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28:2 (1981), 138-144.

-
- [46] OGYI-T- 7577/01, OGYI-T- 7578/01-02 sz. Forgalombahozatali engedély felújítása
- [47] Smith, H., "Monotone semiflows generated by functional differential equations." *Journal of Differential Equations* 66:3 (1987), 420-442.
- [48] Smith, H., "An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences". Springer, New York (2010).
- [49] Repin, Y. M., "On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 29:2 (1965), 254-264.