

Bírálat

Fehér Áron

**Kis késleltetéssel rendelkező lineáris dinamikus rendszerek aszimptotikus jellemzése
című PhD értekezéséről**

A disszertáció kis időkézés hatását vizsgálja három különböző időkéseleltetett rendszerosztály esetén. A disszertáció ennek megfelelően három részre tagolt, minden részhez egy-egy tézis tartozik, melyek mindegyike három altézisből áll. A fő eredményeket a fejezetek végén numerikus számpéldák szemléltetik. A tézisek az 5. fejezetben vannak megfogalmazva, és itt kapunk kitekintést a továbbfejlesztési lehetőségekről is. A disszertáció könnyen olvasható és könnyen követhető, a nyelvezete megfelelő. Az irodalmi áttekintés alapos, az irodalomjegyzékben 128 publikáció található. A magyar és az angol nyelvű tézisfüzet összhangban áll a disszertációval.

A disszertáció három különböző időkésest tartalmazó rendszerosztály (folytonos idejű rendszer pontszerű és megoszló időkésessel illetve diszkrét idejű rendszer végtelen időkésessel) közöséges differenciálegyenletekkel való közelítésével foglalkozik rendszerelméleti és irányítástechnikai alkalmazásokkal. A fő cél azt megmutatni, hogy létezik egy közöséges differenciálegyenlet-rendszer, amelyik aszimptotikusan ekvivalens az eredeti késleltetett rendszerrel, feltéve, ha az időkézés eleget tesz bizonyos kicsinységi feltételnek. Ekvivalencia alatt azt értjük, hogy a két rendszer megoldása egymáshoz tart, és a késleltetett rendszer domináns (legnagyobb valós részű) gyökei megegyeznek a közelítő rendszer gyökeivel. Más közelítésekkel ellentétben, a közelítő rendszer állapotváltozójának hossza ugyanaz, mint az eredeti rendszer állapotváltozója.

A bevezetés után a 2., 3. és a 4. fejezetekben folytonos, diszkrét és újra folytonos rendszerek vizsgálatát mutatja be a jelölt. Itt talán a 3. és a 4. fejezet sorrendjét meg lehetett volna cserélni, hogy a folytonos rendszerek vizsgálata egymás után következzen, de a jelenlegi sorrend is logikus, hiszen a diszkrét rendszerek végtelen sok időkésessel egyfajta átmenetet teremtenek a megoszló időkése rendszerekhez.

Pontszerű időkésesek esetén a kicsinységi feltételt a (2.1) egyenlet definiálja, a közelítő rendszer állapotmátrixát pedig a (2.3) implicit mátrixegyenlet adja. A jelölt iteratív módszereket adott meg az analitikus egyenletek megoldásának közelítésére és megmutatta, hogy az iterációs hiba exponenciálisan nullához tart. Megmutatta, hogy a közelítő rendszer sajátértékei megegyeznek az eredeti rendszer domináns sajátértékeivel és az iteráció során kapott sajátértékek exponenciálisan tartanak az eredeti sajátértékekhez. A közelítő módszert kiterjesztette korlátos inhomogén tagot tartalmazó rendszerekre is. Az eredményeket megfigyelhetőségre és detektálhatóságra is alkalmazta. Fontos gyakorlati eredmény, hogy a klasszikus állapotmegfigyelő tervezési módszerek továbbra is alkalmazhatóak maradnak a közelítő rendszer felhasználásával.

Megjegyzés: A 2.3.12 tételben a (2.22) egyenlet akkor nem teljesül, ha a késleltetett rendszernek van n -nél több pozitív valós részű gyöke. Ezt az esetet valószínűleg a kicsinységi feltétel kizárja, de talán van erre egy szemléletes magyarázat is.

Diszkrét idejű végtelen sok időkésést tartalmazó rendszerek esetén a kicsinységi feltételt a (3.1) egyenlet definiálja. Ebben az esetben az aszimptotikus ekvivalenciát biztosító közelítő egyenletet a (3.7) adja. A rendszermátrixot ebben az esetben is egy implicit mátrixegyenlet (3.8) megoldása adja, amely megoldásra egy iteratív módszert is mutat a jelölt. Az eredményeket véges időkésést tartalmazó inhomogén egyenletekre is kiterjesztette. A kapott eredmények a folytonos idejű eredményeknek egyfajta analógiája.

Megjegyzés: Ebben az esetben is felmerül a kérdés, hogy ha az eredeti rendszernek több, mint n db μ -nál nagyobb abszolút értékű gyöke van, akkor ezeket már nem adhatja meg a közelítő rendszer. Ebben az esetben is valószínűleg a kicsinységi feltétel kizárja ezt a lehetőséget.

Folytonos idejű megoszló időkésést tartalmazó rendszerek esetén a kicsinységi feltételt a (4.1) egyenlet definiálja. Az aszimptotikus ekvivalenciát biztosító közelítő egyenletet a (4.2) adja és a rendszermátrixot a (4.3) implicit integrálegyenlet megoldásaként kapjuk. A megadott kicsinységi feltétel a Driver által megadott feltétel általánosítása. Megoszló időkésés esetén stabilizálhatósági feltételt is megadott a jelölt.

Összességében a dolgozatot értékes munkának tartom, melyet érzésem szerint mérnöki feladatokban is gyakran lehet alkalmazni. Külön élvezetes volt a szakirodalmi áttekintést olvasni, különösképpen azt, hogy a jelölt munkája több, mint 50-60 éve született eredményekhez kapcsolódik és a kis időkéséses rendszerek elméletének alapjait megteremtő matematikusok (Ryabov, Kurzweil, Driver) munkáját általánosítja valamint egészíti ki. Itt még a jelölt figyelmébe ajánlom a lent megadott [1] és [2] publikációkat is Kurzweiltől és Drivertől.

A disszertáció mind a három tézisé, és azoknak az alpontjait is elfogadom új eredménynek. Ezek alapján javaslom az értekezés doktori fokozat megadásának alapjául történő elfogadását.

Néhány kérdés, amely a disszertáció olvasása közben felmerült bennem, és inkább további munkákra tett javaslat:

Hogyan lehet a folytonos idejű eredményeket mintavételezéses rendszerekre alkalmazni, pl. digitális szabályozás (nullad-rendű tartó) esetén. Az időkésésre érvényes felső határ (pl. 0.278s az 1.1 ábrán) mintavételezéses szabályozás estén mekkora mintavételezési időre (T_s) alkalmazható.

A fejezetek végén bemutatott numerikus példák nagyon tanulságosak, de mérnöki szempontból a paraméterek terében való vizsgálat hasznosabb lenne. Az eredményeket jól lehetne szemléltetni egyszerű, kevés paramétert tartalmazó egyenletek esetén. Például a pontszerű időkésés estén a Hayes-egyenlet lenne erre alkalmas: $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$. Az a és a b paraméterek síkján melyik tartományokban lehet a $\tau = 1$ időkésést kicsinynek nevezni? Hogyan viszonyul ez a tartomány a stabil tartományokhoz?

A pontszerű időkéséshez hasonlóan a megoszló időkésés esetén a Cushing-egyenlettel lehetne szemléltetni a paraméterek hatását: $\dot{x}(t) = ax(t) + b \int_{-\tau}^0 w(s)x(t+s)ds$, pl. $w(s) \equiv 1$ mellett. Hasonlóan a pontszerű időkésés esetéhez, itt is felmerülhet a kérdés, hogy az a és a b paraméterek síkján melyik tartományokban lehet a $\tau = 1$ időkésést kicsinynek nevezni és hogyan viszonyul ez a tartomány a stabil tartományokhoz?

Diszkrét idejű esetben pedig a fenitek analógiájára a $x[k+1] = ax[k] + bx[k-r]$ egyenletet lehetne vizsgálni, a legegyszerűbb esetben $r = 1$ esetén, szintén az (a, b) paramétersíkon.

A fenti három egyenleten elvégzett paramétervizsgálattal véleményem szerint mérnöki szempontból is látványosan szemléltetni lehetne a disszertáció eredményeinek lényegét. Szabályozási rendszerek esetén az a paraméter a nyitott rendszert jellemzi, a b pedig a visszacsatolást. Ez természetesen csak egy javaslat a PhD utáni további munkákra.

Egy gyakorlati szempontból fontos általánosítási lehetőség az eredmények időben változó paraméterű rendszerekre való alkalmazása. Első körben periodikus együtthatójú egyenletekre lehetne általánosítani a folytonos pontszerű időkésést tartalmazó rendszerekre kapott eredményeket. Ilyen egyenletekkel sok mérnöki problémát le lehet írni, pl. marási folyamatok során keletkező rezgéseket tipikusan periodikus együtthatójú késleltetett egyenletek írják le. A periodikus rendszerekre való általánosítás matematikai szempontból talán még kezelhető feladat. Általános időfüggő rendszerekre való általánosítás valószínűleg jóval bonyolultabb. Ez is csak a PhD utáni további munkára tett javaslat.

[1] Kurzweil, J., 1971, Small delays don't matter, Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, Springer, pp. 47–49.

[2] Driver, R. D., Sasser, D. W., and Slater, M. L., 1973, "The equation $x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$ with "small" delay," Am. Math. Mon., **80**(9), pp. 990–995.

Budapest, 2022. május 14.



Dr. Insperger Tamás
egyetemi tanár

Műszaki Mechanikai Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem