

Válaszok

Dr. Insperger Tamás opponensi véleményére

Fehér Áron "Kis késleltetéssel rendelkező
lineáris dinamikus rendszerek aszimptotikus jellemzése"
című PhD értekezéséhez

Szeretném megköszönni Dr. Insperger Tamásnak a beküldött dolgozat alapján megfogalmazott észrevételeket, javaslatokat és hogy felhívta a figyelmet az értekezés témájához köthető publikációkra.

A válaszok kidolgozása során törekedtem arra, hogy a lehető legnagyobb mértékben eleget tegyek a bírálóban szereplő észrevételeknek, javaslatoknak.

A bíráló során felmerült megjegyzésekre, észrevételekre és kérdésekre az alábbi pontokban szeretnék választ adni. A válaszok hivatkoznak a disszertáció tételeire és egyenleteire.

- 1a: **A 2.3.12 tételben a (2.22) egyenlet akkor nem teljesül, ha a késleltetett rendszernek van n -nél több pozitív valós részű gyöke. Ezt az esetet valószínűleg a kicsinységi feltétel kizárja, de talán van erre egy szemléletes magyarázat is.**
- 1b: **Diszkrét esetben is felmerül a kérdés, hogy ha az eredeti rendszernek több, mint n db ν_0 -nál nagyobb abszolút értékű gyöke van, akkor ezeket már nem adhatja meg a közelítő rendszer. Ebben az esetben is valószínűleg a kicsinységi feltétel kizárja ezt a lehetőséget.**

V1a: A kicsinységi feltétel mellett az eredeti késleltetett rendszernek csak a rendszer rendjével megegyező (azaz multiplicitással számolva *pontosan* n) számú domináns sajátértéke lehet, melyek mind a $\Re(\lambda) > -\nu_0$, pontosabban az $|\lambda| < \nu_0$ tartományban helyezkednek el (2.3.9 Tétel). Ezen sajátértékek megegyeznek a (2.3) egyenlet (2.4) feltételt kielégítő mátrixmegoldásának sajátértékeivel és a bemutatott eljárással előállított közelítő rendszer a kicsinységi feltétel mellett minden esetben aszimptotikusan ekvivalens lesz az eredeti rendszerrel.

Tehát a 2.3.9 Tétel következményeként minden esetben az eredeti késleltetett rendszer összes nem domináns sajátértéke teljesíti a $\Re(\lambda) \leq -\nu_0$ feltételt, illetve ha az eredeti rendszernek n -nél több domináns sajátértéke van, a kicsinységi feltétel nem teljesülhet.

Ezen észrevételeket a 2.3.10 Megjegyzés összegzi.

Az $A_0 = O$ esetben Arino és Pituk [1] cikkében található 2.2 Lemma Rouché tételének felhasználásával egy másik lehetséges magyarázatot is ad arra, hogy a kicsinységi feltétel mellett miért van éppen n domináns sajátértéke az eredeti rendszernek.

V1b: Hasonlóan igazak a megfogalmazott állítások a diszkrét esetben a kicsinységi feltétel mellett. Az eredeti rendszernek n domináns sajátértéke lehet. Ezek a $|\lambda| \geq \nu_0$ tartományban vannak (3.3.8, 3.3.9 Tételek), és megegyeznek a (3.8) egyenlet (3.20) feltételt kielégítő mátrixmegoldásának sajátértékeivel. Ha az eredeti rendszernek n -nél több domináns sajátértéke van, a kicsinységi feltétel nem teljesül. Ennek szemléltetésére tekintsük az alábbi diszkrét egyenletet ($x \in \mathbb{R}$):

$$\Delta x[k] = x[k+1] - x[k] = \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)x[k] - \frac{1}{\alpha^2}x[k-1].$$

A differenciaegyenlet $z^2 - \frac{2}{\alpha}z + \frac{1}{\alpha^2} = 0$ karakterisztikus egyenletének megoldásai $z_{1,2} = 1/\alpha$. Két azonos sajátértéke van, viszont $x \in \mathbb{R}$, ezért a közelítő rendszert $x[k+1] = \beta x[k]$ skaláris egyenlet alakjában kellene keresni.

Ha a (3.66) feltételt tekintjük, akkor $q = 1$, $\|D\| = |2/\alpha - 1|$ és $\|A\| = 1/\alpha^2$. A $\|D\| < 1$ feltétel teljesül $\alpha > 1$ esetén, viszont a második feltételből származó

$$\|A\| < \frac{q^q}{(q+1)^{q+1}}(1 - \|D\|)^{q+1} = \frac{1}{4}\left(1 - \left|\frac{2}{\alpha} - 1\right|\right)^2,$$

$$\left|\frac{2}{\alpha} - 1\right| < 1 - \frac{2}{\alpha}$$

egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

- 2: **Hogyan lehet a folytonos idejű eredményeket mintavételezéses rendszerekre alkalmazni, pl. digitális szabályozás (nulladrendű tartó) esetén. Az időkésésre érvényes felső határ (pl. 0.278s az 1.1 ábrán) mintavételezéses szabályozás esetén mekkora mintavételezési időre (Ts) alkalmazható.**

V2: Az 1.1-es ábrán feltüntetett rendszer egységnyi erősítéssel rendelkezik, azaz $\|A\| = \|B\| = 1$, ekkor a maximális késleltetés ami mellett a kicsinységi feltétel teljesül $\tau = 0.278s$. Az (1.12) rendszer nulladrendű tartóval elvégzett diszkretizálása esetén az állapotmátrix $A_d = e^{AT_s}$, a késleltetett állapotmátrix $B_d = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A(kT_s+T_s+s)} B ds = (A_d - I_n)A^{-1}B$, ha A invertálható [2]. A kicsinységi feltétel teljesüléséhez szükséges mintavételezési periódus küszöbértéke a (3.66) egyenlet alapján számolható.

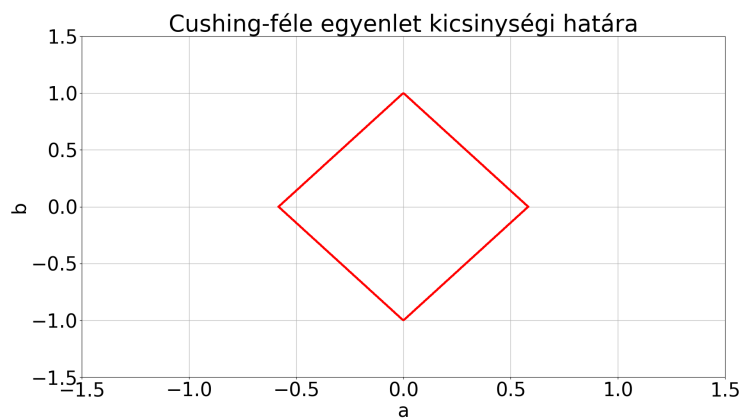
3: **Az eredményeket jól lehetne szemléltetni egyszerű, kevés paramétert tartalmazó egyenletek esetén. Például a pontszerű időkésés estén a Hayes-egyenlet lenne erre alkalmas: $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$ Az a és b paraméterek síkján melyik tartományokban lehet a $\tau = 1$ időkésést kicsinynek nevezni? Hogyan viszonyul ez a tartomány a stabil tartományokhoz?**

V3: A Hayes-féle egyenlet kapcsán felmerült paraméter síkjával a Driver, Sasser, Slater [3] cikkben találkozhatunk. Itt a kicsinységi feltételnek két exponenciális görbe felel meg, a stabilitás határát pedig az $a + b = 0$ egyenes képezi.

4: **A pontszerű időkéséshez hasonlóan a megoszló időkésés esetén a Cushing-egyenlettel lehetne szemléltetni a paraméterek hatását: $\dot{x}(t) = ax(t) + b \int_{-\tau}^0 w(s)x(t+s)ds$, pl. $w(s) \equiv 1$ mellett. Hasonlóan a pontszerű időkésés esetéhez, itt is felmerülhet a kérdés, hogy az a és b paraméterek síkján melyik tartományokban lehet a $\tau = 1$ időkésést kicsinynek nevezni és hogyan viszonyul ez a tartomány a stabil tartományokhoz**

V4: A Cushing-féle egyenlet stabilitási tartományának meghatározása összetettebb feladat mint a Hayes-féle egyenlet elemzése az integrál miatt. Több módszert dolgoztak ki a stabilitás feltérképezésére mint például a Khasawneh tanulmányában [4]. A kicsinységi feltétel és a stabilitási zóna viszonyát összhangba lehetne hozni az említett tanulmány (lásd [4, (5) ábra]) illetve a disszertációs dolgozatban szereplő kicsinységi feltétel (4.3.9 Megjegyzés) összevetésével ((i) ábra).

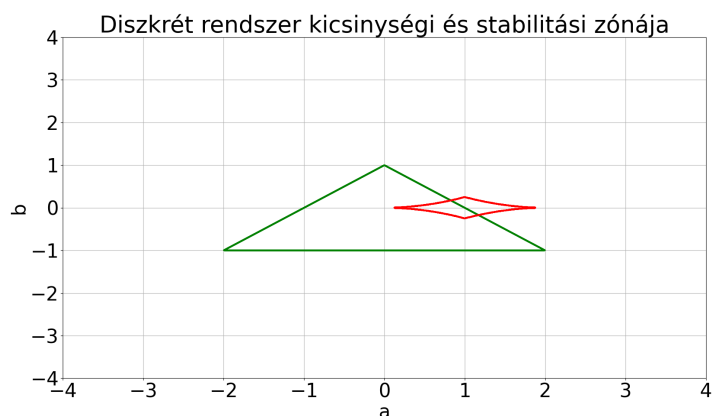
Az (i) ábra a kicsinységi határt szemlélteti a skaláris Cushing-féle egyenletre. Az ábra a 4.3.9 megjegyzésben szereplő egyszerűsített kicsinységi feltétel értelmezése alapján jött létre. Az a és b paramétereket a $[-1.5, 1.5]$ intervallumból választottam 1/1000 lépéssel.



i. ábra. A vörös kereten belüli a és b paraméterekkel a rendszer eleget tesz a kicsinységi feltételnek.

5: **Diszkrét idejű esetben pedig a fenitek analógiájára az $x[k+1] = ax[x] + bx[k-r]$ egyenletet lehetne vizsgálni, a legegyszerűbb esetben $r = 1$ esetén, szintén az (a, b) paramétersíkon.**

V5: A diszkrét idejű eset tanulmányozását a Hayes-féle egyenlet elemzéséhez hasonlóan lehet elvégezni. A fent említett rendszerhez másodfokú karakterisztikus egyenletet lehet rendelni. A kicsinységi feltétel pedig egy a -ban másodfokú abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségnek felel meg az (a, b) síkban.



ii. ábra. A zöld kereten belüli (a, b) értékekkel az eredeti rendszer stabil lesz. A vörös kereten belüli rész eleget tesz a kicsinységi feltételnek.

A (ii) ábra a kicsinységi határt szemlélteti egységnyi eltolással ren-

delkező skaláris késleltetett differenciaegyenletre. Az ábrán szereplő stabilitási zónát a (3.70) karakterisztikus egyenletből származó gyökök kiértékelésével, míg a kicsinységi tartományt a (3.66) egyszerűsített kicsinységi feltétel értelmezése alapján határoztam meg. Az a és b paramétereket a $[-4, 4]$ intervallumból választottam $1/1000$ lépéssel.

- 6: **Egy gyakorlati szempontból fontos általánosítási lehetőség az eredmények időben változó paraméterű rendszerekre való alkalmazása.** Első körben periodikus együtthatójú egyenletekre lehetne általánosítani a folytonos pontszerű időkésést tartalmazó rendszerekre kapott eredményeket. Ilyen egyenletekkel sok mérnöki problémát le lehet írni, pl. marási folyamatok során keletkező rezgéseket tipikusan periodikus együtthatójú késleltetett egyenletek írják le. A periodikus rendszerekre való általánosítás matematikai szempontból talán még kezelhető feladat. Általános időfüggő rendszerekre való általánosítás valószínűleg jóval bonyolultabb. Ez is csak a PhD utáni további munkára tett javaslat.

V6: Az eredmények kivitelezése nem-autonóm rendszerekre szerepel a jövőbeli kutatási terveim között felhasználva az Arino, Győri és Pituk [5] illetve Győri és Pituk [6] cikkek eredményeit, ahol a késleltetett rendszerrel aszimptotikusan ekvivalens közönséges differenciálegyenlet-rendszer rendszermátrixát egy sorfejtéssel adták meg. További terveim ezen eredmények átemelése mérnöki területen felmerülő folyamatok közelítő leírására, elemzésére és szabályozására.

Hivatkozások

- [1] Ovide Arino and Mihály Pituk. More on linear differential systems with small delays. *Journal of Differential Equations*, 170(2):381–407, 2001.
- [2] Chuen-Ming Chen and Kuang-Hwa Wang. State-space model conversion of a system with state delay. *Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part A*, 23(6):782–788, 1999.
- [3] R. D. Driver, D. W. Sasser, and M. L. Slater. The equation $x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$ with “small” delay. *The American Mathematical Monthly*, 80(9):990–995, 1973.

- [4] Firas A. Khasawneh and Brian P. Mann. Stability of delay integro-differential equations using a spectral element method. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(9):2493–2503, 2011.
- [5] O. Arino, I. Győri, and M. Pituk. Asymptotically diagonal delay differential systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204(3):701–728, 1996.
- [6] I. Győri and M. Pituk. Asymptotically ordinary delay differential equations. *Functional Differential Equations*, 12:187–208, 2005.

2022.05.30

Kelt



Fehér Áron