

Az általánosított Thurstone módszer és alkalmazhatóságának vizsgálata, valamint az általa kínált előrejelzések pontosságának növelése

doktori (PhD) értekezés tézisei

GYARMATI LÁSZLÓ

Konzulensek:

Dr. Mihálykó Csaba,
egyetemi docens

Dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva
egyetemi docens

Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Pannon Egyetem
Matematikai Tanszék

Veszprém
2026

1. A kutatási téma jelentősége

Rohanó és mindinkább gyorsuló világunkban egyre nagyobb szerepet kap a különféle döntéstámogató modellek és szoftverek alkalmazása és használata. A mesterséges intelligencia egyre jobban körülvesz minket, és az esetek nagy részében nagyban segíti munkánk, feladataink elvégzését.

Azonban a mesterséges intelligencia akkor teljesít kimondottan jól, ha rengeteg adat és információ áll rendelkezésünkre. De mi a helyzet akkor, amikor csak csekély mennyiségű adat mellett kell döntéstámogatást végezni? Ilyenkor érdemes jól bevált matematikai modellekre hagyatkoznunk, amelyek kevés adat esetén is megbízhatóan képesek teljesíteni.

A páros összehasonlítási modellek kiválóan alkalmasak döntéstámogatásra, információ kinyerésre. A modellek azért hatékonyak az információ kinyerésben, mert egyszerű döntési helyzetekből, objektumok páronkénti összehasonlításból származó adatok alapján részletes, számszerűsített és ellenőrizhető képet adnak a preferenciákról és a kedveltségi/fontossági viszonyokról. Ezek a módszerek megbízható adatok alapján kevés adat esetén is jól teljesítenek.

Különböző páros összehasonlítási modelleket ismerünk. Közülük az egyik a páros összehasonlítási mátrixokon (PCM) alapuló módszerek [16], s köztük a Saaty nevéhez kötődő Analytic Hierarchy Process (AHP [17]). Ez a modellcsoport képezi most a kutatások fő irányát; rengeteg elméleti eredmény [18, 19], alkalmazás [20, 21] és hivatkozás kapcsolódik hozzá. A PCM alapú modellekben a verbális véleményeket vagy más páros összehasonlítások eredményeit számmá konvertálják, és a kapott mátrixot különféle módokon kiértékelik. A módszere előnye a felhasználható számok széles skálája, ami sokfajta döntési kategóriát tesz lehetővé, valamint a könnyű végrehajthatóság

és a robusztusság.

Egy másik modelcsoport a sztochasztikus háttérű Thurstone motivált modellek csoportja. A modellekkel kapcsolatos első publikációk egy évszázada jelentek meg, csupán két választási opciót és normális eloszlású látens valószínűségi változókat megengedve [22]. Ezeket a modelleket a későbbiek során továbbfejlesztették [23, 24, 25], s bár az alkalmazásokban továbbra is megjelentek, a számolások összetettsége miatt átadták a helyüket a PCM alapú módszereknek. A Thurstone motivált modellek esetén a döntéseket direkt módon nem konvertáljuk át számokká, azokat relációkként értelmezzük, és a relációs adatokból a kiértékelések során képesek vagyunk számszerűsített erősségeket adni, amelyek így további feldolgozáson eshetnek át. A hátrányuk közé tartozott, hogy kevés döntési opciót engedtek meg, de ez a hátrány a többopciós modellek alkalmazásával kiküszöbölhető [26, 27]. A számolások összetettsége miatt a megvalósításhoz nagy számítási kapacitás szükséges. Ez az informatika fejlődésének köszönhetően ma már rendelkezésre áll. Így a módszerben rejlő előnyök, úgymint a további összehasonlítási eredményekre vonatkozó valószínűségek becslésének lehetősége, valamint a hipotézisvizsgálatok lehetősége kihasználható. Hátránya azonban továbbra is, hogy a modellek összetettsége miatt az elméleti megalapozás kevésbé áll rendelkezésre. Az ismert elméleti eredmények alapján a módszerek komplexebb vizsgálatokat igényelnek a PCM alapú modellekhez képest. Érdekes felvetődő kérdés továbbá a két modelcsoport esetleges egymáshoz kapcsolódásának kérdése is. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban nem találtam publikációt az irodalomban.

A Thurstone motivált modellek alkalmasak általánosításra, különféle döntéstámogatási, információ kinyerési problémák esetén való alkalmazásra. Amellett, hogy több döntési opció is megadható az általánosított modellekben, még az összehasonlítások esetén felmerülő

esetleges előnyt is képesek kezelni újabb paraméterek beillesztésével. Az adatok súlyozásával az adatok jelentősége is változtatható például az adatok létrejötte óta eltelt idő figyelembe vételével, vagy a véleményező szakértelmének hangsúlyozott kihasználásával. Az additív modellekből kapott becsült várható értékek exponenciális transzformációja után alkalmasak többkritériumos döntéstámogatásra is, amelyre a PCM alapú modelleket is gyakran használják.

2. Motiváció és célkitűzések

A Thurstone motivált modellek bár nagy múltra tekintenek vissza, és széleskörűen alkalmazhatók, de mivel jelentősen bonyolultabbak, mint a PCM alapú modellek, így sok kérdés még megválaszolatlan ezen modellek esetén.

Egy ilyen alapvető kérdés többopciós modellek esetében az, hogy milyen feltételeket kell kielégíteni az adatoknak, hogy belőlük erősségeket lehessen becsülni. A PCM alapú modelleknél a PCM mátrix kiértékelhetőségének szükséges és elégséges feltételét Bozóki és társai munkája alapján ismerjük, ez pedig a PCM mátrix által generált összehasonlítási gráf [28]. Egyszerű példákkal megmutatható, hogy a Thurstone motivált modellek esetén ez a feltétel nem elég, ennél erősebb megkötésekre van szükség. A mélyben rejlő ok az, hogy relációk állnak csak rendelkezésre az összehasonlítások eredményeként.

Az adatok kiértékelhetőségének szükséges és elégséges feltételét két-kategóriás logisztikus eloszlást alkalmazó (Bradley-Terry) modellben Ford bizonyította [29]. Háromkategóriás modellben a Davidson által megadott elégséges feltétel [30], valamint Orbán-Mihálykó és társai által bizonyított feltétel állt rendelkezésünkre [27]. Kutatásaim kezdetekor tehát nem volt ismert a kiértékelhetőség szükséges és elégséges feltétele még 3-opciós modellek esetén sem. Míg a PCM-ek

konzisztenciája és az inkonzisztencia mérése központi kérdés a PCM alapú modelleknél [31, 32], a Thurstone motivált modelleknél az adatok konzisztenciájának fogalmával nem foglalkoztak még. További érdekes kérdésként vetődik fel a kétfajta modellcsoport kapcsolata mind elméleti, mind tapasztalati síkon.

Munkámban a Thurstone motivált modelleket és a szintén sztochasztikus háttérű Davidson modellt kutattam. Több kérdésre kerestem a választ velük kapcsolatban több opciót megengedve a döntések során. Mi az a minimális adathalmaz amely esetén ki tudjuk értékelni a modelleket? Kis adathalmazok esetén hogyan viselkednek? Hány opciós modelleket érdemes használni? Milyen kapcsolatban állnak a PCM alapú modellekkel? Hogyan javítható az információ kinyerés, az előrejelzés magasabb opciószám használatával, és az esetleges előny beépítésével a modellbe? Hogyan lehet tovább általánosítani a modelleket? Hogyan alkalmazhatóak a modellek és milyen hatékonysággal? A modellek milyen tulajdonságai fedezhetők fel az alkalmazások során?

3. Módszerek és eszközök

A Thurstone motivált módszerek kutatásához többféle tudományterületről származó széleskörű eszköztár szükséges: különféle matematikai területek eredményeinek ismerete (valószínűségszámítási, analízisbeli, gráfelméletbeli, numerikus analízisbeli és statisztikai módszerek, optimalizálás), informatikai módszerek (GPU programozás, párhuzamosítás, vizualizáció, szimuláció) és az alkalmazások esetében az adott terület eszközeinek (pl. NETFIT, sportági sajátosságok ismerete, stb.) használata. Egy-egy publikáció eredményeinek eléréséhez ezen területek közül számos rész kombinálása szükséges. Az elért eredmények részben elméleti eredmények, de ezek a mate-

matikai bizonyítások mellett erősen felhasználják számítógépes szimulációk eredményeit is. A paraméterek becsléséhez a maximum likelihood becslési módszert alkalmaztam. Ez egy gyakran használt, optimalizáláson alapuló becslési eljárás, amelynél az optimalizálandó log-likelihood függvény sokváltozós, bonyolult függvény, valamint az optimum létezése és az optimumhely egyértelműségének biztosítása szintén vizsgálandó feladat. Ezzel kapcsolatban általánosítottam az adatok kiértékelhetőségének feltételeit, és annak illusztrálására, hogy ezek az általánosítások jelentősen javítják a kiértékelhetőség eldöntésének lehetőségét véletlen szimulációkat alkalmaztam. A különféle modellek közti kapcsolatok feltárására a matematikai állításokon kívül szintén nagy számú véletlen szimuláció eredményein keresztül mutattam meg az optimális összehasonlítási struktúrák azonosságát a PCM alapú és a Thurstone motivált modellek esetén. Az előrejelzések pontosságának javításakor is a valós adathalmazon történő elemzés mellett szimulációk eredményére is támaszkodtam.

A nagy számú szimuláció végrehajtásához gyors és hatékony numerikus módszerek megalkotására és leprogramozására volt szükség. Olyan numerikus szélsőérték-kereső módszert kerestem, amely kis időigényű, módosítható és logkonkáv függvény esetén jól konvergál. A Nelder-Mead módszerre esett a választásom általános eloszlásfüggvény esetén, míg a Bradley-Terry modell esetén fixpont-iterációs megoldást alkalmaztam. Ezek a numerikus módszerek hatékonyabbak a Matlab, az R és a Python programcsomagok beépített optimalizálóinál.

Ugyancsak komoly informatikai ismeretek szükségesek a gráf összefüggőségi és körkeresési algoritmusok számítógépes megvalósításához. Ezeket a programokat is magam írtam annak érdekében, hogy igen nagy számú szimulációt is végre lehessen hajtani elfogadható idő alatt.

Programozási nyelvnek pedig a nagy gyorsaságú, magas szintű C# programozási nyelvet választottam. Az elkészített optimum-kereső program rendkívüli sebességet képes elérni a gyorsaságra optimalizált Nelder-Mead kódnak és a nagyfokú párhuzamosításnak köszönhetően. Időről-időre GPU programozást is bevettem a sebesség növelése érdekében.

A Nelder-Mead optimalizálót nem csak a Thurstone motivált modelleknél, de a Davidson modellnél és a PCM alapú módszereknél is alkalmazni tudtam. Mivel bizonyos esetekben 10^9 darab szimulációt futtattam, így szükségem volt egy még gyorsabb megoldásra is. A Bradley-Terry modell esetén lehetőség van arra, hogy parciális deriváltak felhasználásával fixpont-iterációs módszert használjak a 2-, 3-, 4- és 5-opciós modellekre, melyek további jelentős gyorsulást eredményeztek. A fixpontiterációs megoldás 3 opciót megengedő modellek esetén átlagosan 50-szeres gyorsulást eredményezett, amivel így hasonló futtatási idő mellett majdnem két nagyságrenddel nagyobb szimulációs szám is megvalósíthatóvá vált. A kiértékelhetőség eldöntéséhez pedig saját, az adott problémára módosított szélességi gráfalgoritmusokat alkalmaztam.

Az általam elkészített programcsomag modulus felépítésű annak érdekében, hogy a különböző feladatokra könnyen alkalmazhatóvá váljon. A programcsomagban nagy fokú automatizációt használtam, amelyet egészen az adatok beolvasásától az adatok megfelelő formában történő kiírásáig alkalmaztam.

A szimulációk segítségével sejtettem meg a szükséges és elégséges feltételt és mutattam rá különféle összefüggésekre különböző modellek között. Ezek segítségével találtam meg az optimális összehasonlítási struktúrákat és végeztem el különféle méréseket információ kinyerés területén különféle opciószámok mellett.

4. Tézisek

Kutatásaim eredményeit 3 fő csoportba rendeztem. Ezek az adatok kiértékelhetőségével, az adatok megbízhatóságával és a modellek alkalmazásaival kapcsolatosak.

1. Téziscsoport: Az adatok kiértékelhetőségének vizsgálata

- 1.1 A 2-opciós Bradley-Terry modell esetén bizonyítottam, az adatok kiértékelhetőségét biztosító szükséges és elégséges feltételt általánosítottam a 2-opciós általános eloszlásfüggvényt alkalmazó Thurstone motivált modellekre.
- 1.2 Megadtam azon feltételeket, amelyek teljesülése esetén a külön-külön kiértékelhető adathalmazok kevés összekötő információ mellett összefűzve is kiértékelhetővé válnak a 3-opciós Thurstone motivált modelleknél.
- 1.3 A 3-opciós Thurstone motivált modellek és a Davidson modell esetén megadtam és matematikai eszközökkel bizonyítottuk a kiértékelhetőség szükséges és elégséges feltételét. Ezzel egy 70 éve nyitott kérdést választottunk meg. Szimulációkkal megmutattam, hogy ez a feltételrendszer bizonyos esetekben igen jelentősen javítja a kiértékelhető adathalmazok helyes felismerését a korábban ismert feltételrendszerekhez képest.
- 1.4 s - és $s+2$ -opciós modellek kapcsolatát vizsgáltam a kiértékelhetőség és információ kinyerés szempontjából. $s = 2, 3$ esetén matematikailag bizonyítottam, hogy amennyiben az s opciós modellben az adatok kiértékelhetőek, akkor természetes megkötések mellett kiértékelhetővé válnak az $s + 2$ opciós modellben is. Szimulációk alapján

megmutattam, hogy megfelelő mennyiségű összehasonlítás esetén a nagyobb opciószámot használó modell alkalmazása ajánlott. Szintén véletlen szimulációkat alkalmazva megadtam azon összehasonlítási számokat, amelytől a komplexebb modell alkalmazása javasolt.

Az 1. Téziscsoport téziseinek jelentősége:

Az adatok kiértékelhetőségének szükséges és elégséges feltételrendszerei 2- és 3-opciós modellekben egyértelműen eldöntik az adatokról, hogy kiértékelhetők-e az adott modellben. Ezáltal elősegítik a döntéseket a modellek alkalmazhatóságát illetően. Nem kiértékelhető adathalmaz esetén a segítségükkel lehetőség nyílik javaslatok készítésére arra vonatkozólag, mely párokat kellene összehasonlítani annak érdekében, hogy az adatok kiértékelhetővé váljanak.

Az adathalmazok kevés összekötő információval történő összekötése megbízható rangsort eredményez, és ennek a feltételrendszernek a kiértékelése kevesebb erőforrást igényel az esetek nagy többségében.

Az opciószám választással kapcsolatos eredmények azt mutatják, hogy a több információt tartalmazó modellek használata előnyös a kisebb opciószámot megengedő, ezáltal kevesebb információt feldolgozó modellekkel szemben, de csak akkor, ha megfelelő mennyiségű információ (összehasonlításból származó adat) áll rendelkezésre.

Az 1. Téziscsoport téziseit alátámasztó publikációk: [1, 2, 3, 4, 5].

- 2. Téziscsoport: Konzisztencia és inkonzisztencia a 2-opciós Bradley-Terry és a Davidson modellben a PCM alapú modellek konzisztenciafogalma alapján**

- 2.1** Megmutattuk, hogy a PCM alapú modellek teljes és nemteljes összehasonlítások esetére általánosan használt konzisztencia fogalma átültethető a kétkategóriás Bradley-Terry modellekre, amennyiben a PCM megfelelő elemeit a jobb és a rosszabb döntések számának hányadosaként értelmeztük. Ezáltal megalkottuk az adatok konzisztenciájának fogalmát a 2-opciós Bradley-Terry modell esetén a PCM konzisztencia definíciója mintájára. A módszer a Luce féle kiválasztási axióma teljesülésén alapul, így alkalmazható a 3-opciós Davidson modellre is.
- 2.2** Egy ekvivalens állítást fogalmaztunk meg és igazoltunk az adatok konzisztenciájára, ami alapja lehet olyan esetekben is a konzisztencia fogalomnak, amikor a Luce féle kiválasztási axióma nem teljesül.
- 2.3** A konzisztencia fogalmán keresztül kapcsolatot találtunk a PCM alapú modellek és a sztochasztikus modellek között, belátva, hogy konzisztens adatok esetén ugyanazt a kiértékelési eredményt adják, amennyiben a PCM megfelelő elemeit az adott objektumok közötti jobb és a rosszabb döntések számának hányadosaként értelmezzük.
- 2.4** Szimulációk segítségével megmutattam, hogy inkonzisztens adatok esetén a 2-opciós Bradley-Terry modelleknél ugyanazok az optimális információ kinyerést biztosító összehasonlítási gráfstruktúrák, mint a PCM alapú modelleknél. Ezáltal nem triviális kapcsolatot találtam a két modellcsoport között. Az összehasonlításokat számos mérőszám, az inkonzisztenciát biztosító különféle perturbációs értékek esetén, véletlen paraméterek és véletlen összehasonlítási adatok alapján végezve kaptam a jellegében egyforma eredményeket a két modelltípus

esetén.

2. Téziscsoport téziseinek jelentősége: Kapcsolatot találtunk a PCM alapú modellek és a sztochasztikus modell család között, amely segíthet a közös gyökök megtalálásában. A 2-opciós Bradley-Terry modellben megalkotott konzisztencia fogalom ekvivalens átalakítása lehetővé teszi olyan sztochasztikus modellekben is a konzisztencia fogalmának bevezetését, amelyekben a Luce féle kiválasztási axióma nem teljesül. Az optimális információ kinyerési gráfstruktúrák ismeretében lehetővé válik az összehasonlítási gráfstruktúrák tervezése az összehasonlított párok számának függvényében a lehető legtöbb információ kinyerése érdekében.

A 2. Téziscsoport téziseit alátámasztó publikációk: [6, 7].

3. Téziscsoport: Különböző opciószámú modellek alkalmazása objektumok kiértékelésére és döntéstámogatásra

3.1 3-opciós modelleket alkalmaztam futballbajnokságok kiértékelésére. A legjobb öt nemzeti futballbajnokság (angol, francia, német, olasz, spanyol) csapatait rangsoroltam 3-opciós Thurstone motivált modellben, valamint AHP-val és neurális hálók segítségével. Megállapítottam, hogy a nemzeti bajnokságok esetén a három modell által eredményezett rangsorok erős korrelációt mutatnak. Amikor azonban a nemzetközi porondon játszott mérkőzések eredményeit felhasználva összefűztem a bajnokságok csapatait, a mesterséges intelligencia által

nyújtott rangsorok nagyon vitathatóvá váltak, az AHP által adott rangsor pedig sokszor túlértékelt a legerősebb hazai bajnokság csapatait nemzetközi porondon. A Thurstone modell azonban a kevés összefűző mérkőzés ellenére is reális eredményeket szolgáltatott, így ajánlható összetett esetek kiértékelésére.

- 3.2** 3-opciós modellt alkalmaztam nemzetközi kézilabda Bajnokok Ligája keretében játszott mérkőzések eredményeinek kiértékelésére. A csoportmérkőzések alapján előrejelzéseket tettem a következő, kieséses szakasz mérkőzési kimenetelére vonatkozólag, és ezek az előrejelzések jobbak lettek, mint az elismert szakértők előrejelzései. A Final4 végeredményét is helyesen jeleztem előre a modell segítségével annak ellenére, hogy a Covid járvány miatt számos mérkőzés elmaradt.
- 3.3** Különféle Thurstone motivált, előnyt és időbeli súlyozást is alkalmazó modelleket alkalmaztam sportmérkőzések eredményeinek előrejelzésére. Ezen modellek előrejelző képességeit általánosan alkalmazott mérőszámok használatával hasonlítottam össze egymással és az irodalomban bemutatott, a [33] publikációban legjobbnak talált módszer előrejelző képességével a 2024/25 idény eredményein keresztül több nemzeti bajnokságban. A paraméterek becsléséhez az előző két idény mérkőzéseinek eredményét használtam fel. Azt találtam, hogy az előnyt is beépítő, időbeli súlyozással kialakított modell előrejelző képessége versenyképes az irodalomban közelmúltban publikált, legjobb előrejelzést biztosító módszerekkel. Az előny beépítése és az időbeli súlyozás az esetek többségében jelentős javulást eredményezett.
- 3.4** Megalkottam egy Bradley-Terry modellre épülő 7-opciós

döntéstámogatási modellt és alkalmaztam sportágválasztásra. A sportolók egyes területeken elért részképességeit a NETFIT felmérés alapján skáláztam, az egyes részképességek jelentőségét edzők véleménye alapján határoztam meg. Az edzők páros összehasonlítások alapján adták meg az adatokat. A modell alkalmasnak bizonyult a sportágválasztás támogatásán túl a sportolók teljesítményének nyomon követésére, esetleges edzéstervek készítésére a teljesítmények részképességeken keresztül történő javítása érdekében.

3.5 Fényforrások vakítóóságuk alapján történő klaszterezését végeztem el 7-opciós Bradley-Terry modell segítségével. Valós adatokkal dolgoztunk, az adatokat a Lausanne-i Egyetem munkatársai vették fel. Az adatokat kiértékeljük szűrések nélkül is, valamint úgy is, hogy kiszűrtük az ellentmondásos adatokat szolgáltató véleményezőkhöz adatait. A kétféle kiértékelés nagyon hasonló erősségeket szolgáltatott. Ez alátámasztja a módszer robusztusságát. A csoportosítás elvégzése után azt tapasztaltuk, hogy ugyanazok a fényforrások ajánlhatók mind a szűrtlen, mind a szűrt adatok alapján.

3. Téziscsoport téziseinek jelentősége:

A Thurstone motivált modellek olyan esetekben is kiválóan alkalmasak sporteredmények kiértékelésére, amikor a kevés rendelkezésre álló információ miatt a mesterséges intelligencia eszközei nem hatékonyak. Kevés összekötő információ esetén is megbízhatóan alakítanak ki összefűzött rangsorokat. Valószínűségszámítási háttérük miatt alkalmasak előrejelzésekre. Ezek pontossága jelentősen növelhető időbeli súlyozás és előnykezelés beépítésével. A többkritériumos döntések esetén

is hasznos információkkal szolgálnak az objektumok egymáshoz viszonyított erősségéről különféle tulajdonság-prioritások mellett. A kiértékelések robusztussága pedig lehetővé teszi jó döntések meghozatalát akkor is, ha a véleményezők némelyike esetlegesen ellentmondásos adatokat szolgáltat.

A 3. Téziscsoporthoz téziseit alátámasztó publikációk: [3, 8, 9, 10, 11, 12].

5. Összegzés és jövőbeli lehetséges kutatási irányok

Kutatásaim során számos, korábban megválaszolatlan kérdésre találtam választ az adatok kiértékelhetősége, konzisztenciájának fogalma, és a modellek alkalmazhatósága témakörében, valamint tulajdonságait illetően. Ezekből az eredményekből az elmúlt 4 évben 9 folyóirat cikkem jelent meg angol nyelven. Ezen cikkek közül 2 D1-es, további 2 Q1-es folyóiratban lett publikálva. PhD tanulmányaim idején 3 angol nyelvű konferencián vettem részt előadóként, a konferencia-kiadványokban megjelent publikációk a tézisfüzetben megtalálhatók. Emellett 2 magyar nyelvű folyóirat cikk társszerzője voltam, illetve számos magyar nyelvű konferencián vettem részt előadással, vagy voltam az előadások társszerzője.

A kutatások során rengeteg új kérdés is felmerült. Természetes módon felvetődő kérdés, hogy mi az adatok kiértékelhetőségének szükséges és elégséges feltétele $3 < s$ opció esetén. Hasznos lenne az adatok konzisztenciájának fogalmát definiálni olyan esetekben is, amikor a Luce-féle kiválasztási axióma nem teljesül, valamint bevezetni inkonzisztencia mérőszámot a Thurstone motivált modellek esetén. Ezen kívül a modelleket újabb területeken is érdemes lenne

alkalmazni. De a legérdekesebb és egyben legmélyebb tudományos kérdés a páros összehasonlítások területén a PCM alapú és a Thurstone motivált modellek kapcsolatának megértése, amely sok-sok további munkát igényel.

A tézisekhez szorosan kapcsolódó publikációk

- [1] Gyarmati, L., Orbán-Mihálykó, É., & Mihálykó, C. (2023). Comparative Analysis of the Existence and Uniqueness Conditions of Parameter Estimation in Paired Comparison Models. *AXIOMS*, 12(6), 575. <http://doi.org/10.3390/axioms12060575>
IF: 1.9
- [2] Gyarmati, L., Mihálykó, C., Orbán-Mihálykó, É., & Mihálykó, A. (2026). Evaluability of paired comparison data in stochastic paired comparison models: Necessary and sufficient condition. *EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH*, 333(3), 852–867. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2026.01.029>.
D1 besorolású; IF:6
- [3] Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., & Gyarmati, L. (2024). Evaluating the capacity of paired comparison methods to aggregate rankings of separate groups. *CENTRAL EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH*, 32(1), 109–129. <http://doi.org/10.1007/s10100-023-00839-3>
Q3 besorolású; IF 2.3
- [4] Gyarmati, L., Mihálykó, C., & Orbán-Mihálykó, É. (2024). Algorithm for Option Number Selection in Stochastic Paired Comparison Models. *ALGORITHM*, 17(9).

<http://doi.org/10.3390/a17090410>

Q2 besorolású; IF: 2.1

- [5] Gyarmati, L., Mihálykó, C., & Orbán-Mihálykó, É. (2024). Application of Different Option Numbers in Thurstone Motivated Models. In 2024 IEEE 3rd Conference on Information Technology and Data Science (CITDS) Proceedings (pp. 1–6). <http://doi.org/10.1109/CITDS62610.2024.10791388>
- [6] Gyarmati, L., Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., Szádóczki, Z., & Bozóki, S. (2023). The incomplete analytic hierarchy process and Bradley–Terry model: (In)consistency and information retrieval. EXPERT SYSTEMS WITH APPLICATIONS, 229(Part B). <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120522>
D1 besorolású, IF: 7.5
- [7] Mihálykó, C., Orbán-Mihálykó, É., & Gyarmati, L. (2024, August). Consistency and Inconsistency in the Case of a Stochastic Paired Comparison Model. In 2024 IEEE 3rd Conference on Information Technology and Data Science (CITDS) (pp. 1-6). IEEE. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10791369>
- [8] Gyarmati, L., Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., & Vathy-Fogarassy, Á. (2023). Aggregated Rankings of Top Leagues' Football Teams: Application and Comparison of Different Ranking Methods. APPLIED SCIENCES-BASEL, 13(7) 4556. <http://doi.org/10.3390/app13074556>
Q2 besorolású; IF:2.5
- [9] Gyarmati, L., Edvy, L., Mihálykó, C., & Orbán-Mihálykó, É. (2023). Decision support for sports choices based on performance measurement using the generalized Thurstone method: the model and a case study. In 10th MathSport International Conference Proceedings 2023 (pp. 35–40).

- [10] Gyarmati, L., Edvy, L., Mihálykó, C., & Orbán-Mihálykó, É. (2024). Decision support for sports selection based on performance measurement applying the generalized Thurstone method. INTERNATIONAL JOURNAL OF SPORTS SCIENCE AND COACHING. <http://doi.org/10.1177/17479541241240609>
Q1 besorolású; IF:2.1
- [11] Gyarmati, L., Mihálykó, C., Orbán-Mihálykó, É. (2025). Forecasting outcomes using multi-option, advantage-sensitive Thurstone-motivated models. FORECASTING, 7(3), 34. <https://doi.org/10.3390/forecast7030034>
Q1 besorolású; IF:3.2
- [12] Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., & Gyarmati, L. (2022). Application of the generalized Thurstone method for evaluations of sports tournaments' results. KNOWLEDGE, 2(1), 157–166. <https://doi.org/10.3390/knowledge2010009>

A tézisekhez szorosan nem kapcsolódó publikációk

- [13] Tóth-Merényi, A., Mihálykó, C., Orbán-Mihálykó, É., & Gyarmati, L. (2025). Exploring Consistency in the Three-Option Davidson Model: Bridging Pairwise Comparison Matrices and Stochastic Methods. MATHEMATICS, 13(9), 1374. <http://doi.org/10.3390/math13091374>
- [14] Mihálykó, L. C., Mihálykóné Orbán, É., & Gyarmati, L. (2021). A Thurstone módszer általánosításai. ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK, 38(1), 127-140.

- [15] Gyarmati, L., Mihálykóné Orbán, É., & Mihálykó, C. (2021). A Thurstone módszer alkalmazása sporteredmények elemzésére a 2020/2021-es női kézilabda Bajnokok Ligája példáján [The application of the Thurstone method for evaluating sports results – Presenting on the EHF Women Handball Championship]. *Testnevelés, Sport, Tudomány / Physical Education, Sport, Science*, 6(1–2), 13–26.

Hivatkozások

- [16] Bozóki, S., Csató, L., & Temesi, J. (2016). An application of incomplete pairwise comparison matrices for ranking top tennis players. *EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH*, 248(1), 211–218.
- [17] Saaty, T. L. (1980) *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource, allocation*. McGraw-Hill, New-York.
- [18] Bozóki, S., & Tsyganok, V. (2019). The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *INTERNATIONAL JOURNAL OF GENERAL SYSTEMS*, 48(4), 362–381.
- [19] Csató, L. (2019). A characterization of the logarithmic least squares method. *EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH*, 276(1), 212–216.
- [20] Vaidya, O. S., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH*, 169(1), 1–29.

- [21] Temesi, J., Szádóczi, Z., & Bozóki, S. (2024). Incomplete pairwise comparison matrices: Ranking top women tennis players. *JOURNAL OF THE OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY*, 75(1), 145–157.
- [22] Thurstone, L.L. (1927). A law of comparative judgment. *PSYCHOLOGICAL REVIEW*, 34, 273–286.
- [23] Bradley, R. A. & Terry, M. E. (1952). Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *BIOMETRICA*, 39, 324–345.
- [24] Glenn, W.A., & David, H. A. (1960). Ties in paired-comparison experiments using a modified Thurstone-Mosteller model. *BIO-METRICS*, 16, 86–109.
- [25] Rao, P.V., & Kupper, L. L. (1967). Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model. *JOURNAL OF AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION*, 62, 194–204.
- [26] Agresti, A. (1992). Analysis of ordinal paired comparison data. *JOURNAL OF THE ROYAL STATISTICAL SOCIETY: SERIES C (APPLIED STATISTICS)*, 41(2), 287–297.
- [27] Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., & Koltay, L. (2019). Incomplete paired comparisons in case of multiple choice and general log-concave probability density functions. *CENTRAL EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH*, 27, 515–532.
- [28] Bozóki, S., Fülöp, J., & Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING*, 52(1–2), 318–333.
- [29] Ford Jr, L. R. (1957). Solution of a ranking problem from binary comparisons. *THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY*, 64(8P2), 28–33.

- [30] Davidson, R. R. (1970). On Extending the Bradley-Terry Model to Accommodate Ties in Paired Comparison Experiments. JOURNAL OF AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, 65, 317–328.
- [31] Brunelli, M. (2018). A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons. INTERNATIONAL JOURNAL OF GENERAL SYSTEMS, 47(8), 751–771.
- [32] Rácz, A. (2022). Mixed-integer linear-fractional programming model and it's linear analogue for reducing inconsistency of pairwise comparison matrices. INFORMATION SCIENCES, 592, 192–205.
- [33] Lasek, J., & Gagolewski, M. (2021). Interpretable sports team rating models based on the gradient descent algorithm. INTERNATIONAL JOURNAL OF FORECASTING, 37(3), 1061–1071.