

Tisztelt dr. Rácz Anett Docens Asszony!

Ezúton szeretném megköszönni, hogy elvállalta a disszertációm bírálatát, valamint a személyes részvételét a házi védésen. Köszönöm javító szándékú javaslatait, megjegyzéseit, amelyeknek köszönhetően a disszertáció elérte végleges formáját. Külön köszönöm, hogy részletesen véleményezte az informatikai munkát, amely háttérben meghúzódó, de nagyon lényeges eleme a disszertációnak.

Az Ön által feltett kérdések és a rájuk adott válaszaim a következők:

1. *(3. fejezet): A Nelder-Mead optimalizálót választotta általános esetben, hivatkozva annak derivált-mentes jellegére. Felmerül a kérdés, hogy véges differencia alapú gradiens közelítés és kvázi-Newton módszer kombinációja nem eredményezett volna-e hatékonyabb megoldást — különösen a 100-as nagyságrendű változószám esetén.*

Nagyon jó ötletnek tűnik a Nelder-Mead módszer helyett ilyen megoldások alkalmazása Thurstone modellek esetén. Én a Bradley-Terry modellek esetén fixpont-iterációt alkalmaztam. A fixpont-iterációs megoldás rendkívül gyors, és valószínűleg nem ad gyorsabb megoldást ebben az esetben a problémára a véges differencia alapú gradiens közelítés és kvázi-Newton módszer kombinációja sem.

A Bradley-Terry és a Thurstone modell esetén nagyon hasonlóak az eredmények, így nagy szimulációs szám esetén a szimulációs futtatásoknál mindig a Bradley-Terry modellt alkalmaztam. A kutatás folytatásában érdemes lenne megvizsgálni, hogy ezen javasolt megoldás mekkora sebességnövekedést képes adni a Thurstone modellek kiértékelése esetén.

2. *(3. fejezet) — Futási idők: Vizsgálta-e, hogy a kód futási ideje hogyan függ a modell paramétereitől (opciószám, objektumok száma, összehasonlítások száma stb.)? Van-e elméleti korlátja annak, hogy mekkora adathalmazon hatékony még a megoldás?*

Végeztem különféle vizsgálatokat, hogy megtudjam milyen hatással van a futtatási időkre az egyes paraméterek változása. Az alábbi táblázatban részletezem az eredményeket. A szimuláció esetén a véletlenül generált élek száma objektumszám·objektumszám/2 volt. Ettől egyik szimulációban sem tértem el, mert a kódok futására ez nincs jelentős hatással.

1000 adatmátrixot generáltam minden esetben, melyeket kiértékeltem az egyes modellekkel, két különböző megoldás segítségével (fixpont-iteráció, Nelder-Mead). 5 tizedesjegy pontosságot állítottam be megállási kritériumnak. Ezen táblázatokban csak az adott módszerek futtatási időigénye van feltüntetve, tehát a kapcsolódó adatok betöltése, elemzése stb. nem része a futtatási időnek. Jelentősen más eredmények születnek akkor, ha azokat is figyelembe vesszük (akkor nagyjából 50-szeres gyorsulás van a két kiértékelő között). Az eredményeket a könnyebb értelmezhetőség okán 1 millió kiértékelésre mutatom be. Az első oszlopban az objektumok száma látható, a másodikban az opciószám, a következő két oszlopban pedig sorra a fixpont iteráció és a Nelder-Mead futási ideje látható másodpercre kerekítve (Intel i7 12700k 1 szál teljesítmény).

objektumok száma	opciószám	fixpont	Nelder-Mead
5	2	4	299
5	3	8	614
5	4	11	690
5	5	17	1056
8	2	8	1173
8	3	16	1635
8	4	25	2320
8	5	38	3424
10	2	11	2374
10	3	24	3967
10	4	38	4326
10	5	61	6646
16	2	28	10167
16	3	62	18292
16	4	100	18537
16	5	139	28892
100	2	1612	2555406
100	3	5552	3895866
100	4	10010	4282943
100	5	14457	6452690

Jól látható, hogy jelentős sebesség különbségbeli, - illetve aránybeli változások vannak az egyes objektumszámok, opciószámok és kiértékelési módszerek esetén. Az egyedüli kivétel ez alól adott objektumszámnál a 3- és 4-opciós modellek esetén a Nelder-Mead módszer használatánál van, ez viszont nem meglepő, ugyanis a két modellt azonos számú paraméterben kell optimalizálni.

Általánosságban elmondható, hogy míg az opciószám növelése jelentősen növeli arányában a fixpont-iteráció esetén a futási időt, az a Nelder-Mead módszer esetén a likelihood függvény számításából adódóan nem jelenik meg olyan jelentősen.

Az objektumszám függvényében is láthatók komoly változások. Míg 8 objektum esetén fixpont-iterációval 2-opciós modell esetén 8 másodperc alatt ki tudunk értékelni 1 millió esetet, addig 100 objektum esetén ez majdnem 27 percre nő.

Ahogy nő az objektumok száma és a modell komplexitása, úgy nő a kiértékelés időigénye is.

A két kiértékelési módszer tekintetében is megfigyelhető számottevő változás a fixpont-iteráció javára: kis objektumszám esetén (5,8,10) 100-200-szoros sebességnövekedés tapasztalható; közepes objektumszám mellett (16) 200-300-szoros is lehet a sebességnövekedés; míg a nagy objektum szám mellett (100) 500-1500-szoros sebességnövekedés is elérhető.

Elméleti korlát nincs a hatékonyságra, de az időbeli korlátok fennállnak. A számítási bonyolultság az objektumszám tekintetében polinomiális, ezért elméletileg nem problémás a hatékonyság, különösen a Bradley-Terry modellnél alkalmazott fixpont-iteráció esetén. Azonban a Thurstone modellek esetén a Nelder-Mead módszer 1000 objektum esetén már igen lassú, itt már véges differencia alapú gradiens közelítés és

kvázi-Newton módszer kombinációja tudna elfogadható futási időket biztosítani számunkra.

Mivel a kutatások általában kis objektumszámok mellett vannak elvégezve, így elég hatékony tud maradni a megoldás. Valós élet példái esetén pedig nincs szükség 100 futtatásnál többre adott bemenet mellett, így a több száz objektumból álló adathalmazokat is rövid idő alatt ki lehet értékelni.

3. (6.1 fejezet) — *A nemzetközi mérkőzések súlyozása: A nemzetközi mérkőzések 4-szeres súlyának választása szakirodalmi hivatkozásra alapozva történt. Ugyanakkor megfigyelhető, hogy az RN és TH_3_N modellek korrelációja éppen csökken a súly növelésekor (0.716-ról 0.641-re). Mi lehet ennek magyarázata — a súlyozás maga okozza ezt a divergenciát, vagy az RN modell más módon kezeli a nemzetközi mérkőzések információtartalmát? Tervezi-e az optimális súlyérték adatvezérelt meghatározását?*

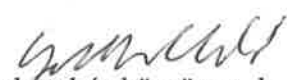
A súlyozásból adódik a divergencia. A TH_3_N modell fix súlyt alkalmaz, amely a likelihood függvényből adódik. Ezzel szemben az RN modell mintaillesztést alkalmaz, ahol a súlyozás nem kap így akkora súlyt.

Abban az esetben, ha ismerjük a célfüggvényt, az ideális súlyokat is meg lehet határozni. A gyakorlatban általában ismerjük a célfüggvényt. Azonban további nehezítő tényező, hogy a súlyok idővel változhatnak.

Mivel az ideális súlyozás meghatározása további előrejelzési pontosság eléréséhez vezet, így érdemes lesz a későbbiekben ezzel foglalkozni.

Még egyszer köszönöm a dolgozat pozitív bírálatát és a javító megjegyzéseket, észrevételeket, melyek nélkül nem lehetne ennyire letisztult a végső verzió.

Veszprém, 2026.09.02.


Tisztelettel és köszönettel:

Gyarmati László